

Ohodnocení kubických grafů

Labelings of cubic graphs

Šárka Parmová

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Mgr. Tereza Kovářová, Ph.D.

Ostrava, 2021

Abstrakt

V této bakalářské práci je zpracován přehled známých výsledků vybraných ohodnocení pro kubické grafy. Zaměřujeme se na tři ohodnocení magického typu, a to na supermagické ohodnocení, hranově magické totální ohodnocení a na vrcholově magické totální ohodnocení. Uvádíme specifické vlastnosti daných ohodnocení včetně souvisejících výpočtů a důkazů základních vlastností. Pro každé ohodnocení shrnujeme známé výsledky pro kubické grafy, spolu s konstrukcemi a důvody, proč u některých grafů ohodnocení nelze sestavit. Dále zkoumáme souvislost mezi hranovým barvením kubických grafů a jejich ohodnoceními. V průběhu práce také pozorujeme, zda-li má planárnost grafu vliv na existenci, popř. neexistenci ohodnocení. Výsledkem je také výčet kubických grafů, resp. tříd kubických grafů, pro které výsledky zkoumaných ohodnocení nejsou známy.

Klíčová slova

graf, kubický graf, ohodnocení grafu, magická ohodnocení, supermagické ohodnocení, hranově magické totální ohodnocení, vrcholově magické totální ohodnocení

Abstract

In this bachelor thesis the known results of selected magic graph labelings for cubic graphs are compiled. We focus our search to Supermagic labeling, Edge magic total labeling and Vertex magic total labeling. We demonstrate specific properties of named labelings by including basic calculations and proofs of known properties. For each labeling we present summary of known results for cubic graphs along with constructions of labelings for those graphs that are magic and proofs for those graphs, that do not have these magic labelings. We also look for relations between edge coloring of cubic graphs and existence of the labeling. In the course of this work we observe, if the planarity of a graph relates to the existence (or non-existence) of the labeling. As a result we present an overview of cubic graphs for which the existence or non-existence of the selected labelings is not known.

Keywords

graph, cubic graph, labeling of graph, magic labeling, supermagic labeling, edge magic total labeling, vertex magic total labeling

Obsah

Seznam obrázků	4
Seznam tabulek	6
1 Úvod	7
2 Základní pojmy	9
2.1 Základní třídy grafů	10
2.2 Další související pojmy a vlastnosti grafů	13
3 Kubické grafy	17
3.1 Platónská tělesa	17
3.2 Žebříky	18
3.3 Möbiovy žebříky	18
3.4 Petersenův graf	19
3.5 Zobecněné Petersenovy grafy	19
3.6 Kubické grafy podle chromatického indexu	20
3.7 Snarky	25
4 Vybraná magická ohodnocení	26
4.1 Super magické ohodnocení	26
4.2 Hranově magické totální ohodnocení	35
4.3 Vrcholově magické totální ohodnocení	44
5 Závěr	55
Literatura	57

Seznam obrázků

2.1	Jednoduchý graf G	9
2.2	Dvou-pravidelný graf	10
2.3	Cesta P_4	11
2.4	Cyklus C_4	11
2.5	Kompletní graf K_5	12
2.6	Kompletní bipartitní graf $K_{2,3}$	12
2.7	Kola W_4, W_5, W_6	13
2.8	Kartézský součin $P_2 \square C_5$	15
2.9	Příklad ohodnocení grafu	16
3.1	Grafy tří-pravidelných Platónských těles (čtyřstěn, krychle, dvanáctistěn)	17
3.2	Žebříky $P_2 \square C_3, P_2 \square C_4, P_2 \square C_5$	18
3.3	Möbiova páska a dvě různá nakreslení Möbiova žebříku M_8 . [5, 6]	19
3.4	Dvě různá nakreslení Petersenova grafu.	19
3.5	Zleva: Möbius-Kantorův graf $P(8, 3)$, Desarguesův graf $P(10, 3)$	20
3.6	Obarvení kompletního grafu K_4 třemi barvami	21
3.7	Obarvení kompletního bipartitního grafu $K_{3,3}$	21
3.8	Obarvení grafu dvanáctistěnu třemi barvami	22
3.9	Obarvení Petersenova grafu čtyřmi barvami	22
3.10	Tři různé flower snarky na 12, 20 a 28 vrcholech. [10]	25
4.1	Supermagické ohodnocení grafu $K_{3,3}$ podle magického čtverce	28
4.2	Popis vrcholů grafu $P_2 \square C_n$	31
4.3	Supermagické ohodnocení M_7 a jeho dobré barvení třemi barvami.	34
4.4	Dvě různá EMT ohodnocení grafu $K_{3,3}$ s magickou konstantou 20.	41
4.5	EMT ohodnocení žebříku $P_2 \square C_3$	43
4.6	EMT ohodnocení Petersenova grafu	44
4.7	VMT ohodnocení grafu K_4 s $h = 20$, a k němu duální ohodnocení s $h = 24$	47
4.8	VMT hodnocení grafu $K_{3,3}$ s magickou konstantou $h = 30$	49

4.9	VMT ohodnocení Dürerova grafu $P(6, 2)$	51
4.10	VMT ohodnocení Petersenova grafu $P(5, 2)$	51
4.11	VMT ohodnocení grafu $P_2 \square C_3$	53

Seznam tabulek

3.1	Souvislé kubické grafy podle chromatického indexu	21
4.1	Magický čtverec	26
4.2	Tabulka ohodnocení	27
4.3	Tabulka možných EMT ohodnocení grafu $K_{3,3}$	41
4.4	Možnosti ohodnocení grafu K_4	47

Kapitola 1

Úvod

Tato práce je zaměřena na studium známých výsledků o určitých ohodnoceních pro skupinu grafů, kterým se říká kubické. Kubické grafy jsou grafy pravidelné, tzn. že všechny jejich vrcholy jsou stejného stupně, a to stupně tři. Patří k nejjednodušším netriviálním grafům, u kterých má smysl ohodnocení podrobněji studovat a existují třídy kubických grafů, pro které nejsou známy výsledky.

V Teorii Grafů je zkoumáno mnoho různých ohodnocení grafů. My jsme se zaměřili na ohodnocení magického typu. Prvním, kdo zavedl téma magických ohodnocení, byl Jiří Sedláček, který v roce 1976 napsal článek “On Magic Graphs” [1]. Magické ohodnocení Sedláčka přiřazuje hodnoty hranám tak, aby součet těchto hodnot dával na každém vrcholu stejné číslo, tzv. magickou konstantu. My se v této práci věnujeme nejprve Sedláčkovu ohodnocení (dále nazýváno supermagické ohodnocení), poté hranově magickému totálnímu ohodnocení a naposled vrcholově magickému totálnímu ohodnocení.

Každé z námi vybraných ohodnocení má své specifické vlastnosti. U jednotlivých grafů nebo i tříd grafů hledáme způsoby konstrukce ohodnocení, a nebo odůvodnění, proč ohodnocení nemůže pro daný graf existovat. Pozorujeme také, zda-li lze vysledovat souvislost ohodnocení grafu s hranovým barvením grafu, tj. zda-li jde znalosti jak hranově obarvit graf využít k sestrojení ohodnocení grafu.

Kromě úvodu a závěru je práce rozdělena do tří hlavních kapitol. V druhé kapitole představujeme pojem grafu, uvádíme třídy do kterých lze grafy rozdělit a také pojmy, které je třeba znát pro pochopení celého textu. Uvádíme základní informace např. o hranovém i vrcholovém barvení grafu, a jak můžeme grafy podle jejich barvení rozdělovat. V třetí kapitole jsou představeny všechny kubické grafy se kterými dále pracujeme. Rozdělit je můžeme na skupinu grafů, které mezi kubickými mají vždy jen jednoho zástupce třeba i z nekonečné třídy grafů obecně různé pravidelnosti a na nekonečné třídy grafů, které jsou kubické pro libovolný počet vrcholů. Také je rozdělujeme do dvou skupin podle chromatického indexu, tj. jestli je možné graf hranově obarvit třemi nebo čtyřmi barvami. Samostatně zmiňujeme Snarky, které mají specifické vlastnosti. Ve čtvrté, stěžejní, kapitole této práce podrobně rozebíráme vybraná ohodnocení. Každá podkapitola začíná uvedením

daného typu ohodnocení a pokračuje odvozením základních vlastností a vzorců daného ohodnocení, které dále aplikujeme na kubické grafy. Každá podkapitola dále obsahuje shrnutí známých výsledků pro kubické grafy pro daný typ ohodnocení. Pokud ohodnocení neexistuje, uvádíme za jakých podmínek a proč.

Kapitola 2

Základní pojmy

V této části jsou uvedeny definice a vlastnosti základních pojmů teorie grafů, které jsou potřebné k porozumění této bakalářské práci. Jsou jen malým výběrem z velkého množství pojmů používaných v teorii grafů.

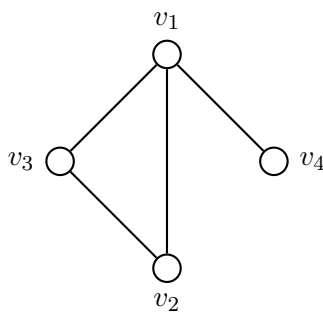
Většina definic a pojmů je převzata nebo inspirována převážně skripty Úvod do Teorie grafů [2] nebo publikací Teorie grafů [3] od Petra Kováře.

Graf můžeme neformálně popsat jako nějaké objekty se spojnicemi mezi nimi. Objektům říkáme vrcholy, a spojnícím říkáme hrany. Přesná definice zní následovně:

Definice 1 *Graf G (také **jednoduchý** nebo **obyčejný** graf) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran. Množina hran E je množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny V .*

Příklad 1

Graf G s množinou vrcholů $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a množinou hran $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$ je ukázán na obrázku 2.1. ■



Obrázek 2.1: Jednoduchý graf G

Pro zjednodušení se často hrany zapisují také jen pomocí vrcholů, bez závorek. Pro graf z obrázku 2.1 můžeme množinu hran zapsat jako $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3\}$. Toto značení budeme v dalším textu využívat.

Potřebujeme také znát pojem sousedních vrcholů a incidentních hran. Sousední vrcholy můžeme chápat jako vrcholy, které jsou spojeny hranou. Na grafu G z obrázku 2.1 jsou sousední např. vrcholy v_1 a v_3 nebo v_2 a v_3 . Sousední nejsou dvojice vrcholů v_3, v_4 a v_2, v_4 . Závislé hrany pak budou ty hrany, které sdílejí společný vrchol. V grafu na obrázku 2.1 jsou tedy závislé hrany např. v_1v_3, v_1v_2 a v_1v_4 . Všechny mají společný vrchol v_1 . Dále, patří-li vrchol hraně, říkáme, že je vrchol s hranou incidentní. To je např. vrchol v_2 s hranami v_1v_2 a v_2v_3 .

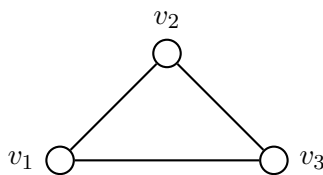
Další definice se týká stupně vrcholu. Stupeň vrcholu můžeme chápat jako číslo, které vyjadřuje s kolika dalšími vrcholy je daný vrchol sousední.

Definice 2 *Stupeň vrcholu* v je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní (spojen hranou) a značí se $\deg(v)$.

Například v grafu na obrázku 2.1 je vrchol v_1 stupně 3. Stupeň vrcholu v_1 zapíšeme jako $\deg(v_1) = 3$.

Nadále se budeme zabývat pojmem obzvláště důležitým pro tento text. Pod pojmem “pravidelný graf” rozumíme graf, ve kterém je každý vrchol incidentní se stejným počtem hran.

Definice 3 *Pravidelný, nebo také regulární graf* je takový graf, který má všechny vrcholy stejného stupně. Grafu říkáme r -pravidelný, pokud má všechny vrcholy stupně r .



Obrázek 2.2: Dvou-pravidelný graf

Příklad 2

Na obrázku 2.2 můžeme vidět příklad grafu, který je dvou-pravidelný. ■

2.1 Základní třídy grafů

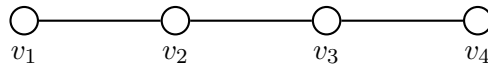
Grafy můžeme rozdělit do mnoha různých tříd. Podle struktury grafu rozlišujeme některé základní třídy grafů.

Graf se nazývá cestou, pokud můžeme vrcholy seřadit do řady tak, že každý vrchol (kromě prvního) je sousední s vrcholem předchozím.

Definice 4 *Cesta* na n vrcholech, kde $n \in \mathbb{N}$ je graf s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množinou hran $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Cestu na n vrcholech značíme P_n .

Příklad 3

Na obrázku 2.3 můžeme vidět cestu s množinou vrcholů $V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a množinou hran $E(P_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$. ■



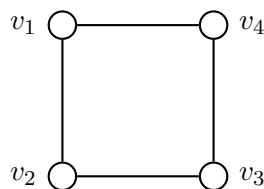
Obrázek 2.3: Cesta P_4

Jestliže spojíme první a poslední vrchol cesty, vznikne nám cyklus. Grafu tedy říkáme cyklus, pokud má vrcholy spojené hranami “dokola”.

Definice 5 Graf nazýváme **cyklem**, pokud má množinu vrcholů $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množinu hran $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Cyklus na n vrcholech značíme C_n .

Příklad 4

Cyklus C_4 na obrázku 2.4 má ve srovnání s cestou P_3 z příkladu 3 o hranu více, tedy $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$. Vytvořili jsme ho přidáním hrany v_1v_4 k cestě na obrázku 2.3. ■



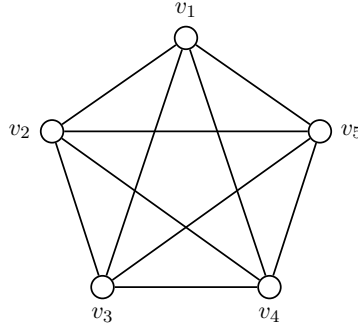
Obrázek 2.4: Cyklus C_4

V případě, že graf bude obsahovat pro daný počet vrcholů všechny možné hrany, a další již nebude možnost přidat, nazývá se grafem kompletním. Kompletní graf má pro daný počet vrcholů pevně stanovený počet hran.

Definice 6 Graf na n vrcholech, kde $n \in \mathbb{N}$, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran se nazývá **úplný** nebo také **kompletní graf** a značí se K_n .

Příklad 5

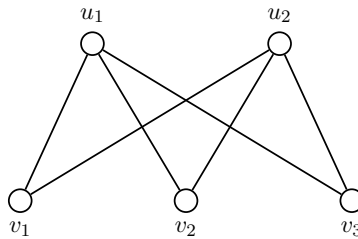
V kompletním grafu K_5 na obrázku 2.5 můžeme vidět všech $\binom{5}{2} = 10$ hran. ■



Obrázek 2.5: Komplettní graf K_5

Můžeme se také setkat s grafy, které mají vrcholy rozděleny do dvou disjunktních množin. Pokud jsou hranou spojeny jen vrcholy z různých množin (vrcholy patřící do stejné množiny nebudou sousední), říká se grafu bipartitní graf. V případě, že graf obsahuje všechny možné hrany mezi množinami, jde o komplettní bipartitní graf. Viz následující definice.

Definice 7 *Graf, který má vrcholovou množinu rozdělenou na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny M a N , kde $|M| = m$, $|N| = n$, a který obsahuje všech $m \cdot n$ hran uv takových, že $u \in M$ a $v \in N$, se nazývá **komplettní bipartitní graf** (nebo také **úplný bipartitní graf**) a značí se $K_{m,n}$. Množinám M a N se říká *partity*.*



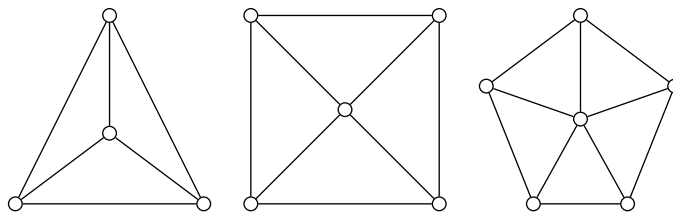
Obrázek 2.6: Komplettní bipartitní graf $K_{2,3}$

Příklad 6

Na obrázku 2.6 vidíme graf $K_{3,2}$ s partitami $M = \{u_1, u_2\}$ a $N = \{v_1, v_2, v_3\}$, který má všech $3 \cdot 2 = 6$ hran. ■

Jako další třídu grafů ještě uvedeme kola (ang. Wheels). Již z názvu (a také z následujícího obrázku 2.7) je zřejmé, že jsou pojmenována podle jejich vzhledu, kde jsou vrcholy cyklu spojeny s vrcholem v jeho středu.

Definice 8 [3] *Graf, který vznikne spojením jednoho izolovaného vrcholu se všemi vrcholy cyklu se nazývá **kolo**. Značí se W_n , kde n je počet vrcholů, $n \geq 4$.*



Obrázek 2.7: Kola W_4 , W_5 , W_6 .

Příklad 7

Na obrázku 2.7 můžeme vidět různé příklady kol. Jako jediný 3-pravidelný graf mezi koly je graf W_4 . Můžeme si také všimnout, že graf W_4 je shodný s kompletním grafem K_4 . ■

2.2 Další související pojmy a vlastnosti grafů

V této části jsou uvedeny pojmy, značení a některé vlastnosti grafů, které třeba nejsou úplně základní, ale úzce souvisí s hlavním zaměřením této práce - ohodnocením kubických grafů.

Věta 1 (Princip Sudosti) [2] *Součet stupňů všech vrcholů v grafu je vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran.*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$

Princip sudosti nám ukazuje, že v součtu všech stupňů počítáme každou hranu dvakrát, u počátečního a koncového vrcholu. Jestliže tedy sečteme stupně všech vrcholů grafu, získáme dvojnásobek počtu hran.

Důsledek 1.1 *Neexistuje graf s lichým počtem vrcholů, které mají všechny lichý stupeň.*

Občas budeme mluvit o souvislých grafech. Přesné zavedení pojmu “souvislost” grafu je uvedeno například v [2]. Neformálně můžeme říci, že lze-li mezi každými dvěma vrcholy u a v v grafu G najít cestu po hranách a vrcholech grafu, je graf G **souvislý**. Se souvislostí grafu jsou spojeny pojmy komponenta a most. Maximální souvislý podgraf grafu se nazývá **komponentou**. **Most** v grafu je taková hrana, po jejímž odstranění přestává graf být souvislý. (Počet komponent grafu se zvětší o jedna.)

Příklad 8

Například úplně první graf na obrázku 2.1 je souvislý a obsahuje most. Je jím hrana v_1v_4 . ■

Mezi grafy se rozlišují také tzv. grafy rovinné. **Rovinný** graf (též **planární** graf) je graf, pro který existuje takové rovinné nakreslení, že se žádné dvě hrany nekříží.

Součástí této práce je také část o barvení grafů. Tomu se věnujeme trochu podrobněji v další podkapitole.

Barvení grafů

Jak už název napovídá, budeme vrcholům a hranám přiřazovat barvy (barvy budou většinou reprezentovány přirozenými čísly).

Definice 9 *Vrcholové barvení grafu G je zobrazení c vrcholové množiny $V(G)$ do množiny barev B . Obvykle je $B = \{1, 2, \dots, k\}$. Je-li $|B| = k$, c se nazývá **vrcholové k -barvení grafu G** . Vrcholové barvení se nazývá **dobré**, jestliže žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou.*

Definice 10 *Řekneme, že graf G je **vrcholově k -obarvitelný**, jestliže existuje jeho dobré vrcholové barvení k barvami. Nejmenší číslo k takové, že graf G je vrcholově k -obarvitelný se nazývá **chromatické číslo grafu G** a značí se $\chi(G)$. Graf G se nazývá **vrcholově k -chromatický**, jsou-li jeho vrcholy dobře obarveny k barvami a platí $k = \chi(G)$.*

Podobně jako vrcholové barvení, lze definovat i hranové barvení grafu. Právě podle možností hranového barvení lze kubické grafy dělit do dvou tříd.

Definice 11 *Hranové barvení grafu G je zobrazení c hranové množiny $E(G)$ do množiny barev B . Obvykle je $B = \{1, 2, \dots, k\}$. Je-li $|B| = k$, c se nazývá **hranové k -barvení grafu G** . Hranové barvení se nazývá **dobré**, jestliže žádné dvě závislé hrany nejsou obarveny stejnou barvou.*

Definice 12 *Řekneme, že graf G je **hranově k -obarvitelný**, jestliže existuje jeho dobré hranové barvení k barvami. Nejmenší číslo k takové, že graf G je hranově k -obarvitelný, se nazývá **chromatický index grafu G** a značí se $\chi'(G)$. Graf G se nazývá **hranově k -chromatický**, jsou-li jeho hrany dobře obarveny k barvami a platí, že $k = \chi'(G)$.*

Následující věta ukazuje, jakých hodnot může chromatický index nabývat v závislosti na největším stupni vrcholu. Bude se rovnat buď hodnotě nejvyššího stupně vrcholu v grafu a nebo číslu o jedna většímu. Pro dobré hranové barvení grafu tedy potřebujeme minimálně takový počet barev, jako je nejvyšší stupeň vrcholu v grafu. Nejvyšší stupeň vrcholu grafu označujeme $\Delta(G)$.

Věta 2 (Vizingova věta) *Pro libovolný graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Příklady hranového barvení grafů si ukážeme na kubických grafech v rámci následující kapitoly.

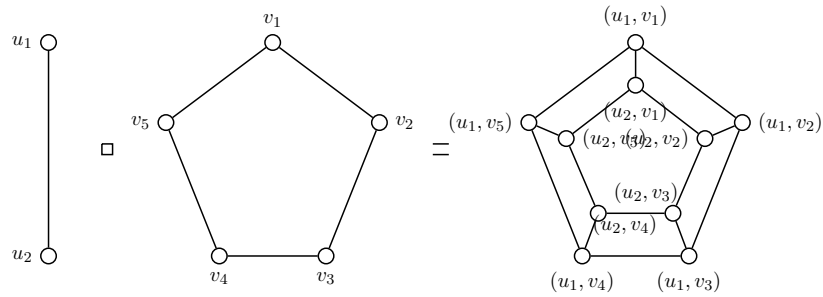
Kartézský součin grafů

Na grafech je možno definovat různé operace. Jednou z nich je kartézský součin, kdy kartézským součinem dvou grafů dostaneme graf nový. Jelikož budeme pracovat s třídou kubických grafů, která se definuje pomocí kartézského součinu, uvedeme si zde definici této operace.

Definice 13 [4] *Nechť G a H jsou grafy s množinami vrcholů $V(G)$ a $V(H)$. **Kartézský součin grafů G a H** je graf $G \square H$ s množinou vrcholů $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ a množinou hran určenou takto: dva vrcholy $w = (u, v)$ a $w' = (u', v') \in V(G \square H)$ jsou v $G \square H$ sousední, pokud $u = u'$ a $vv' \in E(H)$ nebo pokud $v = v'$ a $uu' \in E(G)$.*

Příklad 9

Jako příklad kartézského součinu můžeme vidět na obrázku 2.8 žebřík $P_2 \square C_5$. O žebřících se podrobněji zmíníme později v kapitole 3.2.



Obrázek 2.8: Kartézský součin $P_2 \square C_5$.

■

Ohodnocení grafů

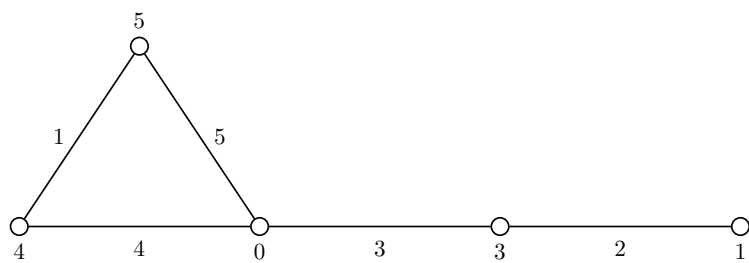
Ohodnocení grafů je nejzásadnější pojem celé této práce. Jako se u barvení grafu přiřazují vrcholům nebo hranám barvy, velmi podobně se postupuje u ohodnocení grafu. Požadavky na způsob přiřazení čísel jsou však různé.

Definice 14 ***Ohodnocení grafu G** je zobrazení $f : A \rightarrow B$, kde $A = V(G)$, $E(G)$ nebo $V(G) \cup E(G)$ a $B \subset \mathbb{N}$. Zobrazení f vrcholům, hranám, nebo oběma, přiřadí nějaké hodnoty, nejčastěji z množiny přirozených čísel.*

Příklad 10

Na obrázku 2.9 můžeme vidět příklad ohodnocení grafu, kdy $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, m\}$ je prosté zobrazení, kde $m = |E(G)|$, a hranám přiřazené hodnoty jsou rozdílem hodnot na vrcholech. Hodnoty hran tvoří aritmetickou posloupnost. Tj. např. pro $f(v_1) = 1$ a $f(v_2) = 3$, je $v_1v_2 \in E(G)$ a $h(v_1v_2) = |f(v_2) - f(v_1)| = 2$. Toto ohodnocení je příkladem tzv. graciózního ohodnocení (ang. graceful labeling).

■



Obrázek 2.9: Příklad ohodnocení grafu

Kapitola 3

Kubické grafy

Jak bylo dříve zmíněno, kubické grafy jsou grafy, které jsou tří-pravidelné. To znamená, že každý vrchol tohoto grafu má stupeň 3, sousedí s ním 3 různé vrcholy. V této části uvedeme přehled nejznámějších kubických grafů, a několik nekonečných tříd kubických grafů, s kterými budeme dále pracovat.

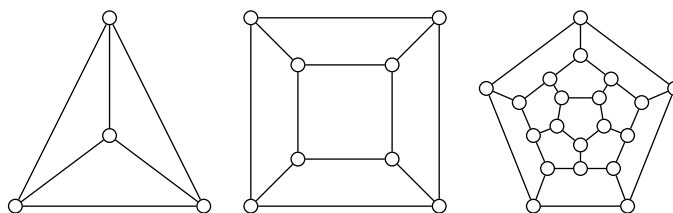
3.1 Platónská tělesa

Platónská tělesa jsou v geometrii konvexní pravidelné mnohostěny. Jak ale tato tělesa souvisí s grafy?

Vrcholy těles se stanou vrcholy grafu, a hrany těles se opět stanou hranami grafu. Ovšem ve formě grafu můžeme s vrcholy a hranami různě pohybovat a zobrazit vše v rovině. Platí, že všechny grafy zobrazující platónská tělesa jsou rovinné.

V trojrozměrném prostoru tato tělesa jsou čtyřstěn, krychle (pravidelný šestistěn), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Nás ale zajímají jen ta tělesa, jejichž graf je tří-pravidelný. Těmi jsou čtyřstěn, krychle a dvanáctistěn. Možná nakreslení grafů odpovídající těmto tělesům jsou na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Grafy tří-pravidelných Platónských těles (čtyřstěn, krychle, dvanáctistěn)

Poznámka 1 Z grafů na obrázku 3.1 jsou dva zahrnuty i v jiných třídách. Čtyřstěn je totožný s kompletním grafem K_4 a tedy i s kolem W_4 . Krychli můžeme také popsat jako kartézský součin $P_2 \square C_4$, kterému se jak víme říká žebřík. Žebříkům se budeme dále věnovat podrobněji.

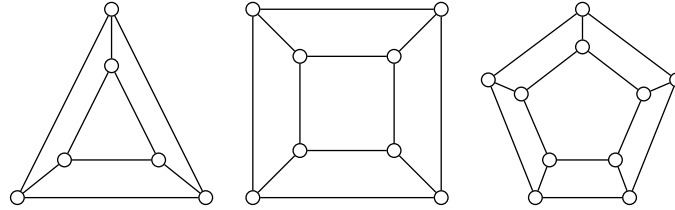
3.2 Žebříky

Žebříkem myslíme graf, který bychom si mohli představit i jako hranol.

Graf žebříku, a ekvivalentně také n -bokého hranolu, sestojíme tak, že vytvoříme kartézský součin cyklu C_n a cesty P_2 . Graf žebříku (n -bokého hranolu) má $2n$ vrcholů a $3n$ hran. Je rovinným grafem. Žebříky budeme značit pomocí kartézského součinu, $P_2 \square C_n$, pro žebřík na $2n$ vrcholech.

Pro další práci s žebříky si zavedeme ještě následující značení. Vrcholy žebříku rozdělíme do dvou cyklů C_n , kdy pro jeden cyklus budeme značit vrcholy u a pro druhý v . Množina vrcholů žebříku tedy je $V(P_2 \square C_n) = \{u_i, v_i | i = 1, \dots, n\}$. Hranami jsou spojeny vrcholy v cyklech, a také spojují oba cykly dohromady. Množina hran je $E(P_2 \square C_n) = \{u_i u_{i+1} | v_i v_{i+1} | u_i v_i | i = 1, \dots, n\}$. Všechny indexy u vrcholů počítáme modulo n (tj. počítáme jen se zbytky po dělení číslem n).

Na obrázku 3.2 můžeme vidět tři ukázky žebříků, $P_2 \square C_3$, $P_2 \square C_4$ a $P_2 \square C_5$.



Obrázek 3.2: Žebříky $P_2 \square C_3$, $P_2 \square C_4$, $P_2 \square C_5$.

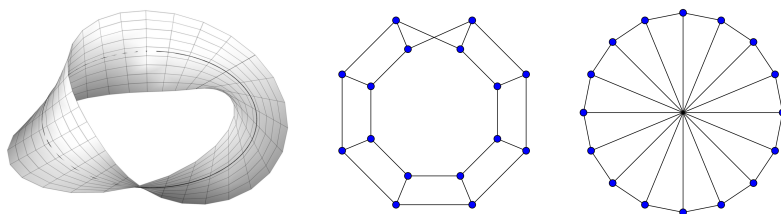
3.3 Möbiovy žebříky

V teorii topologie je Möbiovou páskou plocha, která má pouze jednu stranu a jednu hranu (ve smyslu okraje plochy, ne hrany mezi vrcholy). Patří mezi tzv. neorientované plochy.

V teorii grafů můžeme Möbiovu pásku popsat jako žebřík $P_2 \square C_n$, ve kterém hrany $u_1 u_n$ a $v_1 v_n$ nahradíme hranami $u_1 v_n$ a $v_1 u_n$. Neformálně řečeno, poslední hrany cyklů navzájem překřížíme. Díky tomuto překřížení dostaneme z žebříku graf (Möbiův žebřík), který není rovinný. Möbiův žebřík s $2n$ vrcholy značíme M_n .

Protože s Möbióvy žebříky budeme dále pracovat, zavedeme si podrobnější značení. Označme si vrchol a hrany podobně jako jsme to udělali u žebříků $P_2 \square C_n$. Množina vrcholů je $V(M_n) = \{u_i, v_i | i = 1, \dots, n\}$ a množina hran je $E(M_n) = \{u_1 v_n, v_1 u_n | u_i u_{i+1} | v_i v_{i+1} | u_i v_i | i = 1, \dots, n\}$.

Na obrázku 3.3 můžeme vidět Möbiovu pásku vlevo a dvě různá nakreslení Möbiova žebříku M_8 uprostřed a vpravo.



Obrázek 3.3: Möbiova páska a dvě různá nakreslení Möbiova žebříku M_8 . [5, 6]

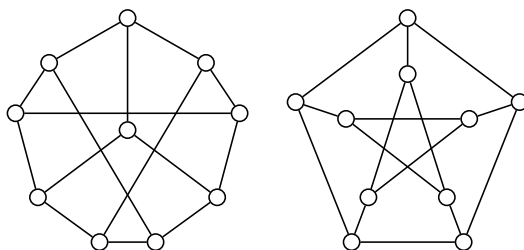
3.4 Petersenův graf

Petersenův graf je v teorii grafů velmi vyjíměčný graf.

Často se objevuje jako protipříklad předpovědí, co by mohlo platit pro všechny grafy daného typu. Některé vlastnosti Petersonova grafu:

- má 10 vrcholů,
- má 15 hran,
- je souvislý,
- je vrcholově tranzitivní (má mnoho symetrií),
- chromatické číslo $\chi = 3$, chromatický index $\chi' = 4$,
- nejkratší cyklus má délku 5,
- není rovinný.

Příklady nakreslení Petersenova grafu jsou na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Dvě různá nakreslení Petersenova grafu.

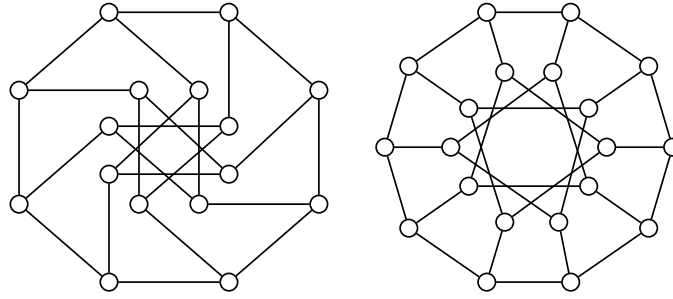
3.5 Zobecněné Petersenovy grafy

Zobecněné Petersenovy grafy jsou nekonečnou třídou kubických grafů. Volně můžeme říct, že jsou vytvořeny pomocí spojení vrcholů pravidelného mnohoúhelníku a odpovídajících vrcholů grafu hvězdy.

Zobecněný Petersenův graf je graf G , který má množinu vrcholů $V(G) = \{u_i, v_i | i = 1, \dots, n\}$ a množinu hran $E(G) = \{u_i u_{i+1} | u_i v_i | v_i v_{i+k}, i = 1, \dots, n\}$. Takovýto graf zapisujeme jako $P(n, k)$, kde n je počet vrcholů vnějšího cyklu a k je číslo, určující, které z vrcholů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ budou sousední. Číslo k může nabývat hodnot z množiny $\{1, 2, \dots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil\}$.

Indexy jsou u těchto grafů počítány modulo n . Význam čísla k můžeme, ne zcela přesně, popsat jako vzdálenost vrcholů $v_i v_{i+k}$ na pomyslném vnitřním cyklu tvořeného vrcholy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Zobecněné Petersenovy grafy jsou planární, pokud je $k = 1$ nebo $k = 2$ a n je sudé. Jejich chromatický index je $\chi' = 3$. Tyto vlastnosti $P(n, k)$ jsou uvedeny například v článcích [7, 8]. V této třídě grafů je zahrnut také Petersenův graf $P(5, 2)$, který jediný z těchto grafů má $\chi' = 4$. Tato třída zahrnuje i třídu žebříků, a to pro $k = 1$.

Pokud si například vezmeme Desarguesův graf z obrázku 3.5 vpravo, množina vrcholů je $V(P(10, 3)) = \{u_1, \dots, u_{10} | v_1, \dots, v_{10}\}$ a množina hran je $E(P(10, 3)) = \{u_1 u_2, u_2 u_3, \dots, u_{10} u_1 | u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_{10} v_{10} | v_1 v_4, v_2 v_5, \dots, v_{10} v_3\}$.



Obrázek 3.5: Zleva: Möbius-Kantorův graf $P(8, 3)$, Desarguesův graf $P(10, 3)$.

3.6 Kubické grafy podle chromatického indexu

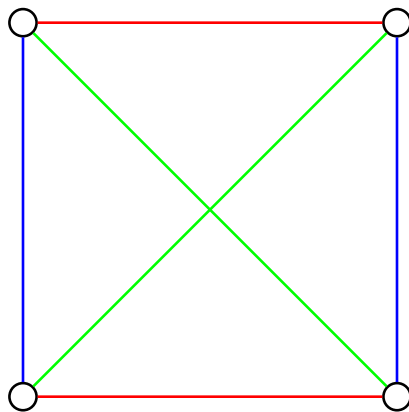
Z Vizingovy věty (Věta 2) už víme, že grafy mají buď chromatický index roven nejvyššímu stupni vrcholu, a nebo o jedničku větší. Tedy $\chi'(G) = \Delta(G)$ nebo $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Pro kubické grafy platí, že jejich chromatický index je roven 3 nebo 4. Podle chromatického indexu můžeme rozdělit kubické grafy do dvou skupin. Do skupiny s chromatickým indexem 3 patří např. Möbiovy žebříky, žebříky a Zobecněné Petersenovy grafy $P(n, k)$ pro $n \neq 5$ a $k \neq 2$. Do skupiny s chromatickým indexem 4 pak patří Snarky, o kterých se zmíníme na konci této kapitoly.

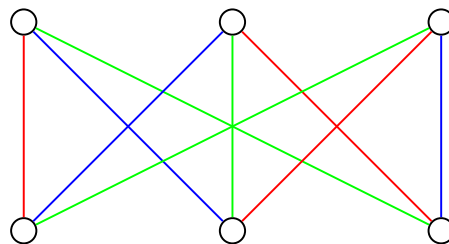
$\chi'(G) = 3$	$\chi'(G) = 4$
Kompletní graf K_4	Petersenův graf $P(5, 2)$
Kompletní bipartitní graf $K_{3,3}$	Snarky
Dvanáctistěn	\vdots
Žebřík $P_2 \square C_n$	
Möbiův žebřík M_n	
Zobecněný Petersenův graf $P(n, k)$	
\vdots	

Tabulka 3.1: Souvislé kubické grafy podle chromatického indexu

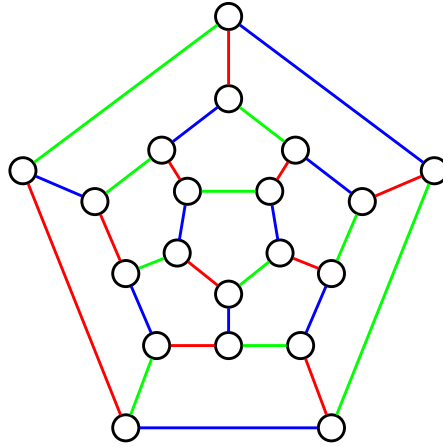
Pro většinu námi popsaných kubických grafů je snadné ukázat jaký je jejich chromatický index. Na obrázcích 3.6 - 3.9 je “dobré” hranové barvení třemi barvami pro K_4 , $K_{3,3}$ a dvanáctistěn a čtyřmi barvami pro Petersenův graf.



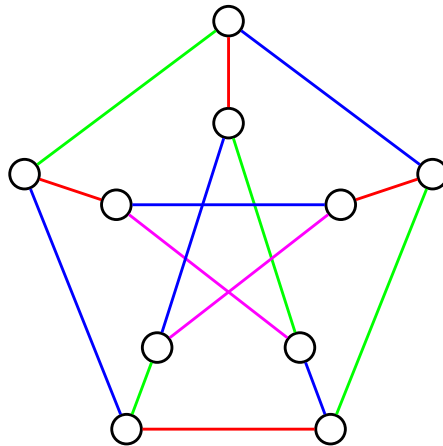
Obrázek 3.6: Obarvení kompletního grafu K_4 třemi barvami



Obrázek 3.7: Obarvení kompletního bipartitního grafu $K_{3,3}$



Obrázek 3.8: Obarvení grafu dvanáctistěnu třemi barvami



Obrázek 3.9: Obarvení Petersenova grafu čtyřmi barvami

Pro všechny kubické grafy dle Vizingovy věty platí $\chi' \geq 3$. Pokud najdeme barvení třemi barvami, pak $\chi' = 3$.

Dále si ukážeme, jak se dají třemi barvami obarvit nekonečné třídy kubických grafů s kterými budeme dále pracovat.

Věta 3 Každý žebřík $P_2 \square C_n$ má $\chi'(P_n \square C_2) = 3$.

Důkaz Nejprve si připomeňme značení vrcholů a hran žebříku $P_n \square C_2$:

$$V(P_2 \square C_n) = \{u_i, v_i | i = 1, \dots, n\} \quad E(P_2 \square C_n) = \{v_i v_{i+1} | u_i u_{i+1} | v_i u_i | i = 1, \dots, n\}$$

Hranové barvení grafu $P_2 \square C_n$ je zobrazení $c : E(P_2 \square C_n) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Aby bylo hranové barvení dobré, ke každé hraně grafu přiřadíme barvu tak, aby se v jednom vrcholu vystřídal všechny

tři barvy a ani jedna se neopakovala. Žádné dvě hrany incidentní se stejným vrcholem nesmí mít přiřazené stejné číslo.

1. Pro n sudé.

Nejprve obarvíme sudé hrany obou cyklů barvou 1:

$$c(v_{2i}v_{2i+1}) = 1, \quad c(u_{2i}u_{2i+1}) = 1, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

Poté obarvíme liché hrany obou cyklů barvou 2:

$$c(v_{2i-1}v_{2i}) = 2, \quad c(u_{2i-1}u_{2i}) = 2, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

A naposledy, obarvíme hrany spojující cykly u a v barvou 3:

$$c(u_i v_i) = 3, \quad i = 1, \dots, n$$

Každá hrana je tedy obarvena. Každé dvě závislé hrany jsou zjevně obarveny různou barvou.

2. Pro n liché.

Jako první obarvíme hrany spojující konce žebříku:

$$c(v_1 v_n) = 3 \quad c(u_1 u_n) = 3.$$

Nyní obarvíme liché hrany žebříku:

$$c(v_{2i-1}v_{2i}) = 1, \quad c(u_{2i-1}u_{2i}) = 1, \quad i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Následují sudé hrany žebříku:

$$c(v_{2i}v_{2i+1}) = 2, \quad c(u_{2i}u_{2i+1}) = 2, \quad i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

A naposledy obarvíme hrany spojující vrcholy u a v :

$$c(v_1 u_1) = 2, \quad c(v_n u_n) = 1,$$

$$c(v_i u_i) = 3, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Každá hrana je tedy obarvena a je zřejmé, že každé dvě incidentní hrany nejsou obarveny stejnou barvou.

■

Zkusíme si také najít dobré barvení Möbiova žebříku M_n .

Věta 4 Každý Möbiův žebřík s $2n$ vrcholy má $\chi'(M_n) = 3$.

Důkaz Nejprve si připomeneme množinu vrcholů a hran Möbiova žebříku:

$$V(M_n) = \{v_1, \dots, v_n | u_1, \dots, u_n\},$$

$$E(M_n) = \{v_1u_2, u_1v_2 | v_i v_{i+1} | u_i u_{i+1}, 2 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

1. Pro n sudé.

Nejprve obarvíme křížící se hrany:

$$c(v_1u_2) = 1 \quad c(u_1v_2) = 1.$$

Poté obarvíme liché hrany grafu:

$$c(v_{2i-1}v_{2i}) = 1, \quad c(u_{2i-1}u_{2i}) = 1, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}.$$

Nyní obarvíme sudé hrany grafu:

$$c(v_{2i}v_{2i+1}) = 2, \quad c(u_{2i}u_{2i+1}) = 2, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}.$$

A naposledy hrany spojující vrcholy cyklů u a v :

$$c(v_i u_i) = 3, \quad i = 1, \dots, n.$$

Všechny hrany jsou obarveny a vidíme, že graf je dobře obarven.

2. Pro n liché.

Nejprve obarvíme křížící se hrany:

$$c(v_1u_2) = 1 \quad c(u_1v_2) = 2.$$

Poté obarvíme liché hrany grafu:

$$c(v_{2i-1}v_{2i}) = 2, \quad c(u_{2i-1}u_{2i}) = 1, \quad i = 2, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Nyní obarvíme sudé hrany grafu:

$$c(v_{2i}v_{2i+1}) = 1, \quad c(u_{2i}u_{2i+1}) = 2, \quad i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

A naposledy hrany spojující vrcholy cyklů u a v :

$$c(v_i u_i) = 3, \quad i = 1, \dots, n.$$

Všechny hrany jsou obarveny a vidíme, že graf je obarven dobře třemi barvami. ■

Věta 5 Každý zobecněný Petersenův graf má chromatický index $\chi' = 3$.

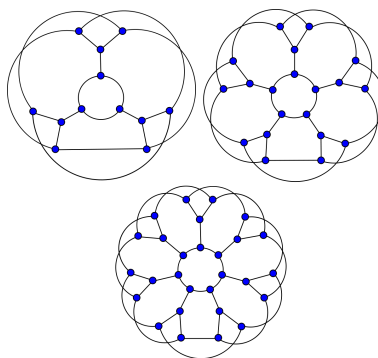
Důkaz Důkaz nalezneme v článku [8]. ■

V následující kapitole si krátce představíme třídu kubických grafů, jejichž chromatický index je roven 4, tzv. Snarky.

3.7 Snarky

Snarky jsou souvislé kubické grafy bez mostů. Aby se zabránilo triviálním případům, další podmínkou Snarků je, že nejmenším cyklem v grafu musí být C_5 . Chromatický index snarků je $\chi' = 4$. Žádný graf této třídy není planární (v grafu existuje alespoň jedno křížení hran). Snarky také nejsou Hamiltonovské. (Tj. v grafu neexistuje Hamiltonovský cyklus. - Cyklus, který prochází všemi vrcholy, každým právě jednou.) První známý snark je právě Petersenův graf, který jsme zmínili již dříve. Je nejmenším existujícím snarkem, a do roku 1946 byl dokonce jediným známým snarkem. Miroslav Chladný a Martin Škoviera řekli: “ I přes jejich zdánlivě jednoduchou definici a přes století dlouhé pátrání, je jejich konstrukce a mnoho jejich vlastností stále neznámých.” [9] Jelikož anglický název “snark” nemá českou alternativu, budeme dále používat anglický výraz.

Jako příklad snarků jsou na obrázku 3.10 ukázány flower snarky. Skupina flower snarků je podskupinou nekonečné třídy snarků.



Obrázek 3.10: Tři různé flower snarky na 12, 20 a 28 vrcholech. [10]

Vyjmenovali a zavedli jsme si nejznámější třídy kubických grafů. Náš výčet nezahrnuje všechny kubické grafy, ale ty z kubických grafů, které jsou lehce popsitelné (kromě Snarků), a na kterých byly matematiky zkoumány různé vlastnosti, např. právě existence různých ohodnocení. Nás v další části textu bude zajímat existence vybraných typů magických ohodnocení pro výše popsané kubické grafy.

Kapitola 4

Vybraná magická ohodnocení

Ještě před zavedením magických ohodnocení je vhodné zmínit, co jsou magické čtverce. Magickými čtverci jsou magická ohodnocení motivována.

Definice 15 *Magický čtverec je čtvercová tabulka čísel, která má v každém řádku, sloupci i na obou hlavních diagonálách čísla dávající stejný součet. Každé číslo se v tabulce musí vyskytovat pouze jednou.*

Příklad 11

Tabulka 4.1 je příkladem magického čtverce řádu 3 s magickou konstantou 15. ■

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Tabulka 4.1: Magický čtverec s konstantou 15

Prvním, kdo zavedl magické ohodnocení, byl J. Sedláček v roce 1976, v článku “On magic graphs” [1]. Požadoval, aby součet hodnot na hranách incidentních s každým vrcholem byl roven konstantě.

4.1 Super magické ohodnocení

Poté, co v roce 1976 zavedl magické ohodnocení Sedláček, Stewart [11] nazval graf supermagickým, pokud hodnoty přiřazené hranám jsou různá, po sobě jdoucí čísla od 1 až po počet hran. Čísla se přiřazují pouze hranám grafu.

Definice 16 *Super magické ohodnocení* je prosté zobrazení $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, kde $m = |E(G)|$, mající vlastnost, že pro každý vrchol $u \in V(G)$ platí

$$\sum_{u \in V(G)} f(uv) = h,$$

kde h je magická konstanta.

Poznámka 2 Graf G je tedy supermagický, pokud součet hodnot na hranách incidentních s vrcholem je pro každý vrchol stejný a roven magické konstantě h . Označíme-li součet

$$\sum_{u \in V(G)} f(uv) = w(u),$$

pak $w(u)$ je váha vrcholu u . Pro supermagický graf je váha každého vrcholu rovna magické konstantě h .

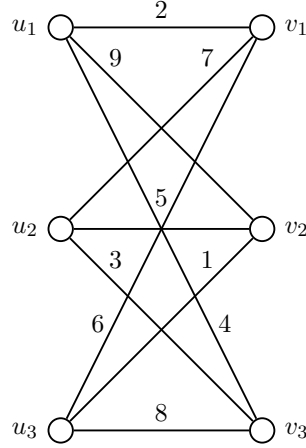
$$w(u) = h, \quad \forall u \in V(G).$$

Příklad 12

Příklad supermagického ohodnocení ukážeme pro $K_{3,3}$. Pokud do záhlaví magického čtverce přidáme vrcholy z partit a číslo na pozici $v_i u_j$ v tabulce 4.2 odpovídá ohodnocení dané hrany, pak platí, že součet čísel přiřazených hranám incidentním s každým vrcholem v_i nebo u_j je 15. Takto upravený magický čtverec můžeme vidět níže v tabulce 4.2. Ohodnocení grafu $K_{3,3}$ odpovídající této tabulce a magickému čtverci 4.1 je ukázáno na obrázku 4.1. ■

	u_1	u_2	u_3
v_1	2	7	6
v_2	9	5	1
v_3	4	3	8

Tabulka 4.2: Tabulka super magického ohodnocení grafu $K_{3,3}$



Obrázek 4.1: Supermagické ohodnocení grafu $K_{3,3}$ podle magického čtverce

Dále si ukážeme, co obecně platí pro grafy, které jsou supermagické.

4.1.1 Základní vlastnosti a výpočty pro supermagické ohodnocení

Věta 6 [4, 12] *Je-li graf G supermagický, pak pro daný počet vrcholů $n = |V(G)|$ a hran $m = |E(G)|$ má vždy stejnou magickou konstantu*

$$h = \frac{m(1+m)}{n}. \quad (4.1)$$

Je-li graf G navíc r -pravidelný, pro magickou konstantu platí

$$h = \frac{r}{2} \left(1 + \frac{r}{2} \cdot n\right). \quad (4.2)$$

Důkaz

Součet hodnot na všech hranách je

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(1+m)}{2}.$$

Pokud je f supermagické ohodnocení, $\forall v \in V(G)$ musí platit, že $w(v) = h$, kde h je magická konstanta. Součet vah všech vrcholů pak bude

$$n \cdot h = 2 \cdot \frac{m(1+m)}{2}.$$

Odtud pro magickou konstantu dostáváme

$$h = \frac{m(1+m)}{n}.$$

Pro druhou část věty využijeme Princip sudosti (Věta 1), tj.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|.$$

Pro r -pravidelný graf s n vrcholy a m hranami můžeme vztah přepsat jako

$$n \cdot \deg(v) = 2m,$$

$$n \cdot r = 2m,$$

$$m = \frac{r}{2}n.$$

Dosazením do vztahu 4.1 pro magickou konstantu dostaneme hodnotu magické konstanty pro každý supermagický r -pravidelný graf s n vrcholy

$$h = \frac{r}{2}(1 + \frac{r}{2}n).$$

■

Uvedme si nyní část věty z článku Jaroslava Ivanča, “On Supermagic Regular Graphs” [12]. Tato věta nám udává nutnou podmínku k existenci supermagického ohodnocení r -pravidelného grafu s určitým počtem vrcholů. Vlastnosti uvedeny v této větě využijeme ve velké části odůvodnění neexistence supermagického ohodnocení kubických grafů.

Věta 7 [12] *Nechť je r -pravidelný graf G supermagický. Pokud je $r \equiv 1 \pmod{2}$, pak počet vrcholů musí být $n \equiv 2 \pmod{4}$.*

Důkaz Jelikož pro lichý stupeň vrcholů se z principu sudosti musí počet vrcholů rovnat sudému číslu, lichému číslu n se nemusíme věnovat. Řekněme tedy, že $r \equiv 1 \pmod{2}$ a $n \equiv 0 \pmod{4}$. Po dosazení do vzorce 4.1 dostáváme:

$$h = \frac{(2k+1)}{2} \cdot (1 + \frac{(2k+1)}{2} \cdot (4k)) = \frac{(2k+1)}{2}(1 + (2k)(2k+1)).$$

Jelikož jsou čísla $(2k+1)$ a $(1+(2k)(2k+1))$ obě lichá, jejich součin bude také lichý. Po dělení dvěma ovšem získáváme magickou konstantu, která se nerovná celému číslu. A to se neslučuje s definicí samotného ohodnocení. ■

4.1.2 Přehled známých výsledků supermagického ohodnocení kubických grafů

- Kompletní graf K_n je supermagický, pokud je $n \geq 6$, $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ nebo $n = 2$. To znamená, že kubický graf K_4 supermagické ohodnocení nemá. [13, 11]

- Komplettní bipartitní graf $K_{n,n}$ je supermagický pro každé kladné $n \neq 2$. $K_{3,3}$ jakožto jediný kubický graf z této třídy, tedy supermagický je. [12, 14]
- Graf dvanáctistěnu není supermagický.
- Žebřík $P_2 \square C_n$ není supermagický pro jakékoliv n . [1]
- Möbiův žebřík M_n má supermagické ohodnocení pokud je $n \geq 3$ a n je liché. [13, 1, 4]
- Petersenův graf není supermagický.
- Zobecněné Petersenovy grafy ?
- Snarky ?

Pro známé výsledky uvedených kubických grafů si ukážeme jak lze jejich supermagické ohodnocení sestavit, popřípadě proč daný graf supermagický není. Jako první začneme s ohodnocením kompletního grafu K_4 .

Ohodnocení kompletního grafu

Stačí si uvědomit, co pro 3-pravidelné grafy platí podle Věty 7. Žádný kubický graf s počtem vrcholů $n \equiv 0 \pmod{4}$ nemůže mít supermagické ohodnocení, protože by se jeho magická konstanta nemohla rovnat celému číslu.

Ohodnocení grafu dvanáctistěnu

Pokud využijeme vzorec pro výpočet magické konstanty z věty 6, po dosazení za $r = 3$ a $m = 30$ dostáváme

$$h = \frac{3(30+1)}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

Vidíme, že magická konstanta se nerovná celému číslu. Dvanáctistěn tak nemůže mít supermagické ohodnocení.

Můžeme také použít Větu 7. Jelikož je graf 3-pravidelný, aby byl supermagický, musí počet jeho vrcholů splňovat $n \equiv 2 \pmod{4}$. Graf dvanáctistěnu má vrcholů 20, podmínka dle Věty 7 tedy neplatí, a supermagické ohodnocení neexistuje.

Ohodnocení žebříku

V článku Jiřího Sedláčka [1] jsme se dozvěděli, že pokud graf nemá ohodnocení magické, nebo pseudo-magické, nemá ani ohodnocení supermagické. Nejprve si řekněme jaké jsou vlastnosti zmíněných ohodnocení. Graf je pseudo-magický, pokud lze různým hranám přiřadit různé hodnoty z množiny všech reálných čísel tak, aby váha každého vrcholu byla stejné číslo. Podle Sedláčka je

graf magický, pouze když magická konstanta náleží do kladných celých čísel, a hodnoty na hranách jsou celá čísla.

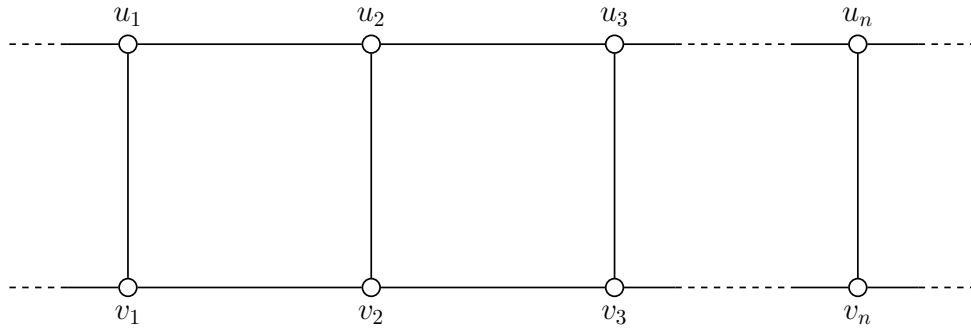
Při hodnocení žebříků se Sedláček tedy napřed zabýval existencí buď magického, nebo pseudo-magického ohodnocení. Je jasné, že pokud graf nemá ani jedno z těchto dvou ohodnocení, nemůže mít ani ohodnocení supermagické. Jeho výsledek je zformulován v následující větě.

Věta 8 [1] Žebřík $C_n \square P_2$ je magický pro n sudé a $n \geq 4$, není ale supermagický. Pokud je n liché, a $n \geq 3$, $C_n \square P_2$ není pseudo-magický.

Důkaz této věty můžeme najít v článku “On Magic Graphs” [1] Jiřího Sedláčka. Na základě jeho výsledku můžeme formulovat následující důsledek pro supermagické ohodnocení.

Důsledek 8.1 Žebřík $P_2 \square C_n$, pro $n \geq 3$ není supermagický.

Důkaz Uvedeme zde naši verzi důkazu, kde částečně využijeme podobné argumenty jako Sedláček. Sedláček podrobný důkaz pro žebříky neuvádí, jen se odvolává na podobný postup jako v důkazu pro Möbiův žebřík M_n , kde n je sudé. Pro ověření neexistence pro n sudé použijeme nutnou podmínku z Věty 7. Ta nám říká, že pokud je stupeň všech vrcholů lichý, počet vrcholů musí být $n \equiv 2 \pmod{4}$, aby mohlo supermagické ohodnocení grafu existovat. Pokud ale spočteme celkový počet vrcholů žebříku, pro n sudé ($n = 2k$), je celkový počet vrcholů $|V(P_2 \square C_n)| = 2n = 4k$, a $4k \equiv 0 \pmod{4}$.



Obrázek 4.2: Popis vrcholů grafu $P_2 \square C_n$

Předpokládejme, že je graf $P_2 \square C_n$ pro n liché supermagický, se supermagickým ohodnocením f . Označme si nyní hrany a vrcholy jako na obrázku 4.2 výše, v souladu se značením pro žebříky na straně 18. Začneme jednoduchou úvahou. Odečteme-li hodnotu hrany $u_1 u_2$ od hodnoty hrany $v_1 v_2$, dostaneme číslo, které si označíme například jako ε_1 . Jelikož musí mít každá hrana jinou hodnotu, ε_1 nikdy nebude rovno 0.

$$\varepsilon_1 = f(v_1 v_2) - f(u_1 u_2), \quad \varepsilon_1 \neq 0. \quad (4.3)$$

Tento vztah platí také pro všechny ostatní protilehlé hrany žebříku na cyklech C_n . Pro $i = 1, 2, \dots, n$

$$\varepsilon_i = f(v_i v_{i+1}) - f(u_i u_{i+1}), \quad \varepsilon_i \neq 0. \quad (4.4)$$

Ukažme si nyní, jak by vypadal výpočet magické konstanty pro u_2 a v_2 . Sečteme tedy hodnoty na všech hranách sousedících s těmito vrcholy.

$$f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_2 v_2) = f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) + f(u_2 v_2).$$

Odtud po úpravě

$$f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) = f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3). \quad (4.5)$$

Ze vztahu 4.4 si nyní vyjádříme $f(v_1 v_2)$ a $f(v_2 v_3)$.

$$f(v_1 v_2) = f(u_1 u_2) + \varepsilon_1, \quad f(v_2 v_3) = f(u_2 u_3) + \varepsilon_2 \quad (4.6)$$

a dosadíme do 4.5.

$$f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) = f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1.$$

Ze struktury žebříku zřejmě platí, že

$$\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i.$$

Využitím poslední rovnosti a dosazením do 4.6

$$f(v_i v_{i+1}) = f(u_i u_{i+1}) - (-1)^i \varepsilon_1, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Vztah pro $f(v_n v_1)$ bude

$$f(v_n v_1) = f(u_n u_1) - (-1)^n \varepsilon_1.$$

Počet vrcholů n je liché číslo. Pokud (-1) umocníme lichým číslem, získáme

$$f(v_n v_1) = f(u_n u_1) + \varepsilon_1. \quad (4.7)$$

Vypočteme si nyní ale magickou konstantu pro vrcholy u_1 a v_1 .

$$f(u_n u_1) + f(u_1 u_2) + f(u_1 v_1) = f(v_n v_1) + f(v_1 v_2) + f(u_1 v_1),$$

$$f(u_n u_1) + f(u_1 u_2) = f(v_n v_1) + f(v_1 v_2),$$

$$f(u_n u_1) + f(u_1 u_2) = f(v_n v_1) + \varepsilon_1 + f(u_1 u_2).$$

Vyjádříme $f(v_nv_1)$

$$f(v_nv_1) = f(u_nu_1) - \varepsilon. \quad (4.8)$$

Dosazením 4.8 do vztahu 4.7 získáme

$$f(u_nu_1) - \varepsilon_1 = f(u_nu_1) + \varepsilon_1,$$

odkud

$$\varepsilon_1 = 0 \quad (4.9)$$

Vidíme, že $\varepsilon_1 = 0$ a to je spor. Supermagické ohodnocení grafu $P_2 \square C_n$ tedy neexistuje. ■

Ohodnocení Möbiova žebříku

Podobně jako jsme v předchozí části zjistili pro žebříky, pokud nenajdeme pseudo-magické ohodnocení Möbiova žebříku, nenajdeme ani jeho ohodnocení supermagické. Podle článku Sedláčka [1] platí tento výsledek.

Věta 9 [1] *Pokud je n liché a $n \geq 3$, potom je Möbiův žebřík M_n supermagický. Pokud je n sudé, Möbiův žebřík supermagický není.*

Důkaz V rámci důkazu si pro Möbiův žebřík M_n označíme množinu vrcholů

$V(M_n) = \{u_i, v_i | i = 1, \dots, n\}$ a množinu hran $E(M_n) = \{u_1v_n, v_1u_n | u_iu_{i+1} | v_iv_{i+1} | u_iv_i | i = 1 \dots n\}$

Dále ukážeme, jak lze zkonstruovat supermagické ohodnocení Möbiova žebříku pro n liché, kde konstrukce je provedena podle důkazu od Sedláčka [1]. Předpokládejme tedy že je n liché, tj. $n = 2k + 1, k \geq 1$. Supermagické ohodnocení f sestrojíme následovně:

Pro $i = 1, 2, \dots, k$,

$$f(u_{2i-1}u_{2i}) = i, \quad f(v_{2i-1}v_{2i}) = 2k + i + 1,$$

$$f(u_{2i}u_{2i+1}) = 3k + i + 2, \quad f(v_{2i}v_{2i+1}) = k + i + 1.$$

Pro $j = 1, 2, \dots, 2k + 1$,

$$f(u_jv_j) = 6k + 4 - j$$

a konečně

$$f(u_1v_{2k+1}) = 3k + 2, \quad f(u_{2k+1}v_1) = k + 1.$$

Není těžké zkontrolovat, že hodnoty f jsou všechna čísla $1, 2, \dots, 3n$, kde $3n$ je počet hran. Magická konstanta pro tento graf, vypočtena ze vzorce 4.1, je $h = 9k + 6$. Pro uvedené ohodnocení je pro každý vrchol součet hodnot na hranách roven této hodnotě.

Pro n sudé, $n = 2k$, je $|V(M_n)| = 2n = 4k$. Möbiův žebřík nesplňuje nutnou podmínku existence supermagického ohodnocení z Věty 7 ($4k \not\equiv 2 \pmod{4}$) a graf M_{2k} tedy není supermagický. ■

Příklad 13

Ukážeme například ohodnocení Möbiova žebříku M_7 , kde $7 = 2k+1$ a tedy $k = 3$. Magická konstanta pro toto ohodnocení je rovna $h = 33$.

$$f(u_1u_2) = 1 \quad f(v_1v_2) = 8$$

$$f(u_2u_3) = 12 \quad f(v_2v_3) = 5$$

$$f(u_3u_4) = 2 \quad f(v_3v_4) = 9$$

$$f(u_4u_5) = 13 \quad f(v_4v_5) = 6$$

$$f(u_5u_6) = 3 \quad f(v_5v_6) = 10$$

$$f(u_6u_7) = 14 \quad f(v_6v_7) = 7$$

$$i = 1, 2, \dots, 7$$

$$f(u_1v_1) = 21 \quad f(u_2v_2) = 20 \quad f(u_3v_3) = 19$$

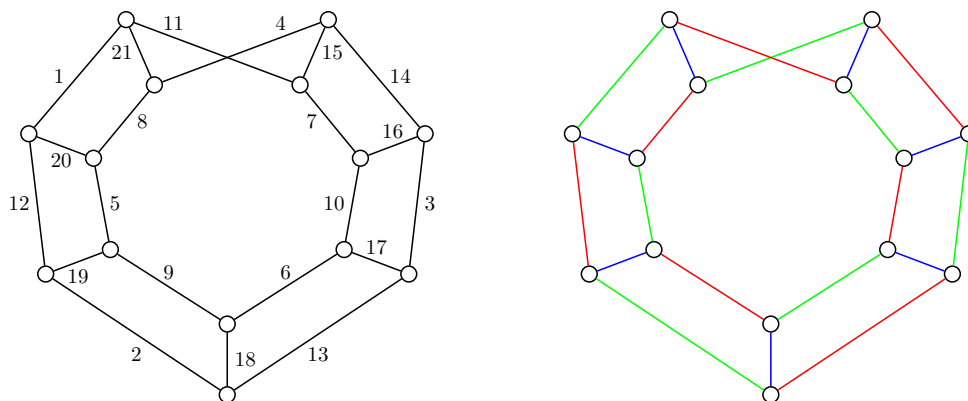
$$f(u_4v_4) = 18 \quad f(u_5v_5) = 17 \quad f(u_6v_6) = 16$$

$$f(u_7v_7) = 15$$

A naposledy

$$f(u_1v_7) = 11 \quad f(u_7v_1) = 4$$

■



Obrázek 4.3: Supermagické ohodnocení M_7 a jeho dobré barvení třemi barvami.

Připomeňme si nyní kapitolu o hranovém barvení grafů. Möbiův žebřík má chromatický index 3. Lze jej tedy dobře obarvit třemi barvami. Z obrázku 4.3 můžeme vidět, že obarvení jaksí odpovídá supermagickému ohodnocení Möbiova žebříku. Barva zelená náleží nejnižším hodnotám hran $\{1, \dots, n\}$, červená barva hodnotám $\{n+1, \dots, 2n\}$, a modrá pak hranám spojující dva “cykly” s nejvyššími hodnotami $\{2n+1, \dots, m+n\}$.

Ohodnocení Petersenova grafu

Jelikož má Petersenův graf $P(5, 2)$ celkem 10 vrcholů, nesplňuje nutnou podmínku existence supermagického ohodnocení z Věty 7.

Na závěr této kapitoly je třeba říct, že ne pro všechny námi zmíněné kubické grafy se nám podařilo informaci o supermagickém ohodnocení uvést. U některých se nám nepodařilo najít informaci, zda-li graf supermagický je, nebo není. Přesněji jde o Zobecněné Petersenovy grafy a Snarky.

Co se týče hranového barvení grafu a supermagického ohodnocení, nelze zcela jistě určit souvislost. Některé kubické grafy s chromatickým indexem 3 lze supermagicky ohodnotit, jiné zase ne. Např. žebřík s $\chi' = 3$ není supermagický pro jakékoliv n , ale Möbiův žebřík, který má také $\chi' = 3$, je supermagický pro n liché. U grafů s chromatickým indexem 4 nemůžeme souvislost ověřovat, protože neznáme žádné výsledky o existenci supermagického ohodnocení těchto grafů. Jedinou souvislost hranového barvení a supermagického ohodnocení pozorujeme u Möbiova žebříku, popsanou výše dle obrázku 4.3. U supermagického ohodnocení planárnost grafu nezajišťuje předem známý výsledek ohodnocení. Např. kompletní graf K_4 je planární, a supermagické ohodnocení nemá. Na druhou stranu Möbiův žebřík planární není. Pro n sudé supermagický ohodnocení neexistuje a pro n liché supermagické ohodnocení existuje.

Podívejme se nyní na další typ ohodnocení, a to ohodnocení hranově magické.

4.2 Hranově magické totální ohodnocení

Budeme-li mluvit o ohodnocení hranově magickém totálním, budeme přiřazovat hodnoty jak hranám, tak i vrcholům. Tehdy ještě známé jako “magic valuations” jej zavedli A. Kotzig a A. Rosa v článku “Magic valuation of finite graphs” [15] v roce 1970. Uvedme si nyní jeho definici.

Definice 17 *Hranově magické totální ohodnocení grafu G je prosté zobrazení $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m+n\}$, kde $n = |V(G)|$ a $m = |E(G)|$. Současně pro každou hranu $uv \in E(G)$ platí $f(u) + f(v) + f(uv) = h$, kde h je magická konstanta.*

Pro toto ohodnocení zavedeme zkratku z anglického názvu ohodnocení “Edge Magic Total labeling”. Od teď budeme místo “hranově magické totální ohodnocení” používat výraz “EMT ohodnocení”. Grafy, pro které existuje hranově magické totální ohodnocení budeme nazývat EMT grafy.

Jako je v poznámce 2 uvedena váha vrcholu pro supermagické ohodnocení, u EMT ohodnocení můžeme podobně zavést váhu hrany. V tomto případě bude váhou hrany myšlena suma ohodnocení dvou s hranou incidentních vrcholů, s ohodnocením samotné hrany. Pro hrany uv a EMT ohodnocení f platí

$$\forall uv \in E(G) : \quad w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv).$$

4.2.1 Základní vlastnosti a výpočty pro EMT ohodnocení

Pro EMT ohodnocení grafu s n vrcholy a m hranami platí vztah

$$m \cdot h = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n (deg(v_i) - 1) \cdot f(v_i), \quad (4.10)$$

kde v součinu $m \cdot h$ m -krát sčítáme magickou konstantu h přes všechny hrany grafu G . Výrazem $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ sčítáme všechny použité hodnoty na hranách a vrcholech $\{1, \dots, m+n\}$. Jelikož u EMT ohodnocení sčítáme hodnoty všech vrcholů $deg(v_i)$ -krát, přičteme hodnotu každého vrcholu ještě $(deg(v_i) - 1)$ -krát.

Pro r -pravidelný graf, který má všechny vrcholy stejného stupně, bude vztah vypadat takto

$$m \cdot h = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + (r-1) \sum_{i=1}^n f(v_i). \quad (4.11)$$

Nám ale postačí vztah pro grafy kubické ($r = 3$)

$$m \cdot h = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + 2 \sum_{i=1}^n f(v_i). \quad (4.12)$$

Základní požadavky pro EMT ohodnocení f s magickou konstantou h podle článku [16] jsou:

- $f(u) + f(v) + f(w) = h$ nesmí nastat, pokud jsou některé dva z vrcholů u, v, w sousední (Pokud by některé dva sousední byly, hodnota třetího vrcholu by musela náležet hraně, která je spojuje. Nemohly by být splněny podmínky pro EMT ohodnocení, protože hodnoty na hranách a vrcholech jsou různá čísla.)
- Součty $f(u) + f(v)$, kde $u, v \in V(G) \wedge uv \in E(G)$, jsou všechny různé. Pokud by se některé ze dvou rovnaly, obě hrany incidentní s dvojicí vrcholů by musely mít stejné ohodnocení.
- Pokud je u sousední s v , pak platí $0 < h - (f(u) + f(v)) \leq m + n$

Označme si nyní S jako sumu všech hodnot vrcholů grafu G .

$$S = \sum_{i=1}^n f(v_i), \quad \text{kde } v_i \in V(G).$$

Nejnižší možné hodnoty vrcholů jsou $\{1, \dots, n\}$, a nejvyšší $\{m+1, \dots, m+n\}$. Potom součet hodnot vrcholů se bude pohybovat kdekoliv mezi součtem nejnižších a součtem nejvyšších hodnot.

$$\sum_{i=1}^n i \leq S \leq \sum_{i=m+1}^{m+n} i.$$

S použitím vzorce pro součet aritmetické řady pak platí

$$\binom{n+1}{2} \leq S \leq m \cdot n + \binom{n+1}{2}. \quad (4.13)$$

Pokud existuje EMT ohodnocení f r -pravidelného grafu G , dostaneme ze vzorce 4.11

$$h = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(r-1)}{m} S. \quad (4.14)$$

Hodnota magické konstanty je určena jen tím, jaké hodnoty jsou přiřazeny vrcholům. To znamená, že i ohodnocení hran jsou určena jakmile jsou přiřazeny hodnoty vrcholům, a pro ohodnocení hran platí

$$f(uv) = h - (f(u) + f(v)). \quad (4.15)$$

Ze vztahů 4.13 a 4.14 můžeme odvodit horní a dolní mez pro magickou konstantu EMT ohodnocení. Víme, že

$$\frac{(n+1)n}{2} \leq S \leq m \cdot n + \frac{(n+1)n}{2}.$$

Vynásobíme $\frac{(r-1)}{m}$

$$\frac{(r-1)(n+1)n}{2m} \leq S \frac{(r-1)}{m} \leq \frac{(r-1)}{m} \cdot \left[m \cdot n + \frac{(n+1)n}{2} \right].$$

Přičteme $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2m}$

$$\begin{aligned} & \frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(r-1)(n+1)n}{2m} \leq \\ & \leq S \frac{(r-1)}{m} + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} \leq \frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(r-1)}{m} \cdot \left[m \cdot n + \frac{(n+1)n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dosadíme h

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(r-1)(n+1)n}{2m} \leq h \leq \frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(r-1)}{m} \cdot \left[m \cdot n + \frac{(n+1)n}{2} \right].$$

Tímto dostaneme horní a dolní mez pro magickou konstantu EMT ohodnocení r -pravidelného grafu. Magická konstanta závisí na počtu hran, vrcholů a jejich stupních.

Pro kubický graf dosadíme za $r = 3$ a po upravení získáváme

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(n+1)n}{m} \leq h \leq \frac{(m+n)(m+n+1)}{2m} + \frac{(n+1)n}{m} + 2n \quad (4.16)$$

Jak lze vidět, mezi dolní a horní mezí je pro kubický graf rozdíl $2n$.

Duální ohodnocení

V článku “Edge-magic total labelings” [16] ukázali, že ke každému EMT ohodnocení f existuje tzv. ohodnocení duální f' . Pro sestrojení duálního ohodnocení potřebujeme spočítat nejvyšší možnou hodnotu ohodnocení sečtením počtu hran, vrcholů a připočtením jedničky (aby žádná hodnota f' nemohla být nulová). Od tohoto čísla pak odečteme hodnoty EMT ohodnocení f .

Pro všechny vrcholy tedy bude duální ohodnocení

$$f'(v) = (m+n+1) - f(v), \quad \forall v \in V(G)$$

a pro všechny hrany uv platí

$$f'(uv) = (m+n+1) - f(uv).$$

Duální ohodnocení má magickou konstantu $h' = 3(m+n+1) - h$.

I u EMT ohodnocení je známá nutná podmínka pro existenci tohoto ohodnocení pro r -pravidelný graf. Věta s nutnou podmínkou je uvedena například v článku “On a question by Erdős about edge-magic graphs” [17] z roku 1998. Věta říká, že pokud je stupeň vrcholů r -pravidelného grafu lichý, počet vrcholů nesmí být $n \equiv 4 \pmod{8}$, aby graf mohl být EMT.

Věta 10 [17] *Graf G , který je r -pravidelný, r je liché a jeho počet vrcholů je n , kde $n \equiv 4 \pmod{8}$, nemá EMT ohodnocení.*

Následující důkaz je převzat z [17] a námi mírně poupraven tak, aby byl pro čtenáře přehlednější.

Důkaz Předpokládejme, že r je liché, a $n \equiv 4 \pmod{8}$. Z principu sudosti víme, že $n \cdot r = 2m$. Jestliže $r = 2k + 1$ a $n = 8l + 4$, kde $k, l \in \mathbb{R}$, potom

$$m = \frac{(8l+4)(2k+1)}{2} = \frac{2(4l+2)(2k+1)}{2} = 2(2(2lk+2k+2l)+1) = 2(2q+1) = 4q+2,$$

kde $q = 2(lk+k+l)$ je sudé číslo.

Ze vzorce 4.10 vidíme, že pokud je $m \equiv 2 \pmod{4}$, pak $m \cdot h$ je sudé číslo. Pro r liché je $(r-1) \sum_{i=1}^n f(v_i)$ také sudé číslo. Upravíme-li číslo $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$, pro $n = 8l + 4$ a $m = 4q + 2$,

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} = \frac{(4q+8l+6)(4q+8l+7)}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(2q + 4l + 3)(4q + 8l + 7)}{2} = 8q^2 + 32l^2 + 32l + 26q + 52l + 21 = \\
&= 2(4q^2 + 16l^2 + 16ql + 13q + 26l + 10) + 1,
\end{aligned}$$

zjistíme, že je liché. Součet lichého a sudého čísla se ale nemůže rovnat sudému číslu. Získáváme tedy spor, a EMT ohodnocení pro grafy s předpokládanými hodnotami pro r a n nemůže existovat. ■

4.2.2 Přehled známých výsledků EMT ohodnocení kubických grafů

- Kompletní graf K_n má EMT ohodnocení, pokud je jeho počet vrcholů 1, 2, 3, 5 nebo 6. Graf K_4 tedy EMT ohodnocení nemá. [13, 17]
- Kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ má EMT ohodnocení pro všechna m, n . Tudíž i graf $K_{3,3}$ má EMT ohodnocení. [13, 16]
- Graf dvanáctistěnu nemá EMT ohodnocení.
- Žebřík $P_2 \square C_n$ má EMT ohodnocení, pokud je n liché. [13, 18]
Nemá EMT ohodnocení pro $n \equiv 2 \pmod{4}$.
Pro $n \equiv 0 \pmod{4}$?
- Möbiův žebřík M_n nemá EMT ohodnocení pro $n \equiv 2 \pmod{4}$
Pro hodnoty $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$?
- Petersenův graf $P(5, 2)$ má EMT ohodnocení. [13, 16]
- Zobecněné Petersenovy grafy $P(n, k)$ mají EMT ohodnocení pro všechna n, k . [13, 19]
- Snarky ?

Ohodnocení kompletního grafu K_4

Z věty 10 víme, že pokud je počet vrcholů $n \equiv 4 \pmod{8}$, EMT ohodnocení neexistuje.

Ohodnocení kompletního bipartitního grafu $K_{3,3}$

Z článku “Magic Valuations of Finite graphs” [15] víme, že kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ má EMT ohodnocení pro všechna m, n . V tomto článku také najdeme důkaz, který je konstruktivní, a tedy podle něj můžeme ohodnocení sestavit.

Věta 11 [15] *Kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ má hranově magické totální ohodnocení pro všechny hodnoty m a n .*

Důkaz je převzatý z článku [15] s podrobnějšími argumenty.

Důkaz Označme si partity grafu $K_{m,n}$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad \text{a} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

První ohodnotíme vrcholy partity A .

Pro $i = 1, 2, \dots, m$

$$a_i = i.$$

Ohodnotíme vrcholy partity B .

Pro $j = 1, 2, \dots, n$

$$b_j = j \cdot m + j + m = j(m + 1) + m$$

a pro hrany pak platí

$$f(a_i b_j) = (m + 1) \cdot (n - j + 2) - i - 1.$$

Nyní potřebujeme zkontrolovat, zda-li je váha každé hrany rovna jedné hodnotě - magické konstantě. Vypočteme si tedy váhu všech hran grafu $K_{m,n}$. Váha hrany je součtem hodnot dvou incidentních vrcholů a hrany samotné.

$$\begin{aligned} w(a_i b_j) &= i + j(m + 1) + m + (m + 1) \cdot (n - j + 2) - i - 1 = \\ &= j(m + 1) + m + n(m + 1) - j(m + 1) + 2(m + 1) - 1 = m + mn + n + 2m + 1 = 3m + mn + n + 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že váha všech hran bude stejná, nezávisí na proměnných i a j . Je to stálá hodnota, která vyjadřuje magickou konstantu $h = 3m + mn + n + 1$.

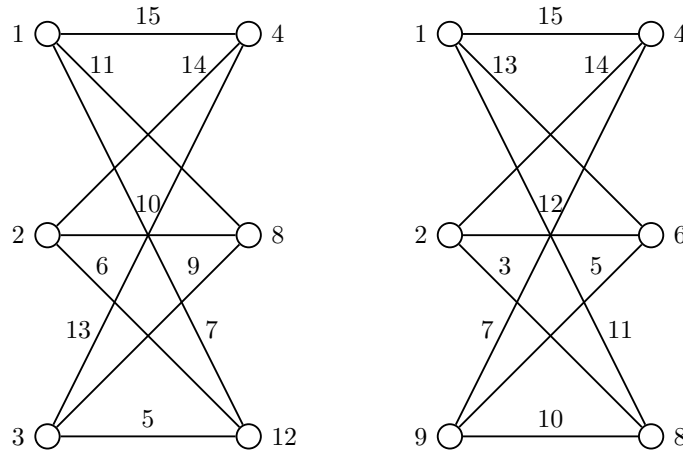
Na vrcholech a hranách jsou použity všechny hodnoty od 1 po $(m \cdot n + m + n)$. ■

Také v článku “Edge-magic total labelings” [16] můžeme najít EMT ohodnocení kompletního bipartitního grafu. V publikovaných výsledcích pro $K_{m,n}$ vidíme, že je EMT ohodnocení sestrojeno ohodnocením vrcholů jednotlivých partit, a to $A = \{1, 2, \dots, n\}$ a $B = \{n + 1, 2n + 2, \dots, m(n + 1)\}$.

V článku jsou uvedeny všechny možnosti EMT ohodnocení pro graf $K_{3,3}$. Ohodnocení byla nalezena pomocí počítače a jsou shrnuta v tabulce 4.3 níže. Ohodnocení, které je na čtvrtém řádku tabulky 4.3, s magickou konstantou $h = 22$ a hodnotami vrcholů $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{7, 11, 15\}$ lze sestavit pomocí vzorce z Věty 11.

$h = 18$	žádná ohodnocení	
$h = 20$	$A = \{1, 2, 3\}$	$B = \{4, 8, 12\}$
	$A = \{1, 2, 9\}$	$B = \{4, 6, 8\}$
$h = 22$	$A = \{1, 2, 3\}$	$B = \{7, 11, 15\}$
	$A = \{7, 3, 5\}$	$B = \{7, 8, 15\}$
	$A = \{1, 5, 12\}$	$B = \{6, 7, 8\}$
$h = 24$	žádná ohodnocení	

Tabulka 4.3: Tabulka možných EMT ohodnocení grafu $K_{3,3}$



Obrázek 4.4: Dvě různá EMT ohodnocení grafu $K_{3,3}$ s magickou konstantou 20.

Ohodnocení grafu dvanáctistěnu

Z věty 10 víme, že počet vrcholů u kubického grafu nesmí být $n \equiv 4 \pmod{8}$. Přesně tohle ale graf dvanáctistěnu splňuje. Pro tento graf tedy nemůže EMT ohodnocení existovat.

Ohodnocení žebříku

Pro žebřík $P_2 \square C_n$ víme, že pokud je $|V(P_2 \square C_n)| \equiv 4 \pmod{8}$, tj. $n \equiv 2 \pmod{4}$, EMT ohodnocení neexistuje. Pro n liché jsme v práci “Edge Magic Total Labeling of Prism” [18] našli postup, jakým lze EMT ohodnocení zkonstruovat.

Věta 12 [18] *Graf žebříku $P_2 \square C_n$ má EMT ohodnocení pro n lichá.*

Důkaz Rozdělme si vrcholy tak, jako jsme to už udělali s žebříky u supermagického ohodnocení na obrázku 4.2. Začínáme tedy dvěma cykly s vrcholy u a v . Nejprve ohodnoťme vrcholy.

Pro $i = 1, 2, \dots, n$.

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & i = 1, 3, \dots, n \\ \frac{i+n+1}{2} & i = 2, 4, \dots, n-1, \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+3n}{2} & i = 1, 3, \dots, n \\ \frac{i+2n}{2} & i = 2, 4, \dots, n-1. \end{cases}$$

Pro magickou konstantu platí

$$h = \frac{1}{3n} \left(\frac{(5n+1)(5n)}{2} + 2S \right).$$

Nyní ověříme, zda jsou váhy na hranách konstantní. Vypočteme si nejprve hodnotu S .

$$S = \sum_{x \in V(G)} f(x) = \sum_{i=1}^n f(u_i) + \sum_{i=1}^n f(v_i).$$

$$\sum_{i=1}^n f(u_i) = \sum_{i=1,3,\dots}^n \frac{i+1}{2} + \sum_{i=2,4,\dots}^{n-1} \frac{i+n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^n f(v_i) = \sum_{i=1,3,\dots}^n \frac{i+3n}{2} + \sum_{i=2,4,\dots}^{n-1} \frac{i+2n}{2} = n \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vidíme, že vrcholy cyklu u jsou ohodnoceny prvními n čísly, a hodnoty vrcholů cyklu v hned následují čísla od $n+1$ po $2n$. Pro hrany nám tak k ohodnocení zbývají čísla $\{2n+1, \dots, 5n\}$.

Pokud tedy sečteme dvě předchozí rovnosti, získáme

$$S = 2n^2 + n.$$

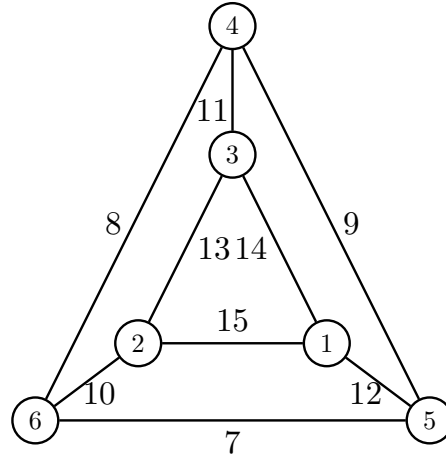
Po dosazení do vzorce pro magickou konstantu dostáváme

$$h = \frac{11n+3}{2}.$$

■

Příklad 14

Ukažme si například EMT ohodnocení na malém grafu $P_2 \square C_3$. Ohodnotíme si vrcholy hodnotami $\{1, \dots, 6\}$. Vypočítáme magickou konstantu $h = 18$ a dopočítáme hodnoty pro hrany grafu. Hotové ohodnocení můžeme vidět na obrázku 4.5 níže.



Obrázek 4.5: EMT ohodnocení žebříku $P_2 \square C_3$.

■

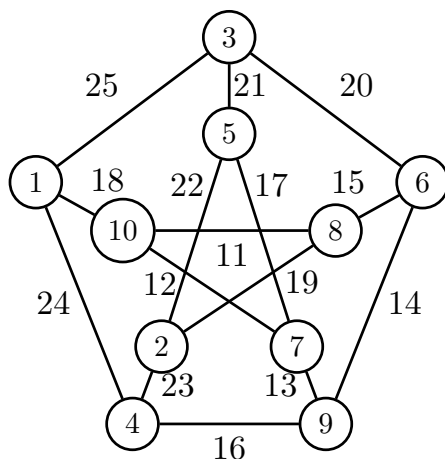
Z článku [13] víme, že uvedené ohodnocení žebříku $P_2 \square C_n$ existuje pouze pro n liché. Tato konstrukce pro n sudé nelze použít. Zda existuje EMT ohodnocení žebříku pro $n \equiv 0 \pmod{4}$ nevíme.

Ohodnocení Möbiova žebříku

Podle nutné podmínky existence EMT ohodnocení z Věty 10 graf s počtem vrcholů $|V(G)| \equiv 4 \pmod{8}$ není EMT. Proto Möbiův žebřík M_n , kde $|V(M_n)| = 2n$ a $n \equiv 2 \pmod{4}$ nemá hranově magické totální ohodnocení. Pro $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$ se nám nepodařilo najít výsledky s ohodnocením Möbiova žebříku a je pravděpodobné, že tyto výsledky nejsou známy.

Ohodnocení Petersenova grafu

Ohodnocení Petersenova grafu můžeme najít v článku “Edge-magic total labeling” [16], kde jsou napsány hodnoty vrcholů. Magická konstanta s danými hodnotami vrcholů ze vzorce 4.12 vychází 29. Hodnoty hran jsme dopočítali k magické konstantě. Ohodnocení je ukázáno na obrázku 4.6 níže.



Obrázek 4.6: EMT ohodnocení Petersenova grafu

Závěrem této kapitoly můžeme říct, že tak jako u supermagického ohodnocení, ani u EMT ohodnocení se nám nepodařilo zjistit existenci EMT ohodnocení všech kubických grafů popsaných v kapitole o kubických grafech 3. Například nevíme, zda existuje EMT ohodnocení žebříku $P_2 \square C_n$ pro $n \equiv 0 \pmod{4}$ a EMT ohodnocení Möbiova žebříku M_n pro $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$. U Zobecněných Petersenových grafů se nám nepodařilo získat článek [19] s výsledky EMT ohodnocení. Ve srovnání se supermagickým ohodnocením jsme zjistili, že nejznámější snark, kterým je Petersenův graf, EMT ohodnocení má. Stává se tak jediným grafem s chromatickým indexem 4, u kterého jsme zatím zjistili existenci ohodnocení magického typu. Žádnou zřejmou souvislost EMT ohodnocení s hranovým barvením grafu jsme v popsaných ohodnoceních nezaznamenali. Mezi kubickými grafy rovinnost nebo nerovinnost grafu nevylučuje ani nezaručuje existenci EMT ohodnocení. Jak planární grafy (např. žebříky) tak i neplanární grafy (např. Petersenův graf $P(5, 2)$) EMT ohodnocení mají.

4.3 Vrcholově magické totální ohodnocení

Jako třetí typ magického ohodnocení jsme ke studiu zvolili vrcholově magické totální ohodnocení. Jako jsme u EMT ohodnocení sčítali hodnoty na hranách, u tohoto ohodnocení budeme sčítat hodnoty připadající vrcholům. Vrcholově magické totální ohodnocení poznáme tak, že při sečtení ohodnocení vrcholu, a ohodnocení hran s ním incidentních, dostaneme pro všechny vrcholy stejnou hodnotu - magickou konstantu. Vrcholově magické totální ohodnocení poprvé uvedli McDougall, Miller, Slamin a Wallis v článku "Vertex-Magic Total Labelings of Graphs" [20].

Definice 18 *Vrcholově magické totální ohodnocení grafu $G(V, E)$ je prosté zobrazení $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + m\}$, pokud existuje konstanta h taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:*

$$f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv) = h.$$

Poznámka 3 Pro zdlouhavost názvu “Vrcholově magické totální ohodnocení” budeme dále zapisovat toto ohodnocení jako “VMT ohodnocení” (z anglického “Vertex Magic Total labeling”). Graf, který má VMT ohodnocení budeme nazývat “VMT graf.”

Jako jsme si u předchozích ohodnocení zavedli váhu vrcholu nebo hrany, i nyní budeme počítat s váhami vrcholů pro VMT ohodnocení. U supermagického ohodnocení jsme za váhu vrcholu považovali pouze součet ohodnocení hran incidentních s tímto vrcholem. U ohodnocení VMT k této sumě přidáme také hodnotu samotného vrcholu. Bude tedy platit

$$w(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv). \quad (4.17)$$

4.3.1 Základní vlastnosti a výpočty pro VMT ohodnocení

V článku [20] zjistíme mnoho důležitých informací, které patří k základním znalostem ohledně VMT ohodnocení.

Označme si součet hodnot hran a součet hodnot vrcholů EMT ohodnocení f jako S_m a S_n . Jasně platí, že hodnoty vrcholů a hran budou všechna čísla z množiny od 1 po $(m+n)$.

$$S_n + S_m = \sum_i^{m+n} i = \binom{n+m+1}{2}. \quad (4.18)$$

Nyní vezmeme vztah 4.17, a uděláme součet vah přes všechny vrcholy grafu G . To znamená, že hodnotu každého vrcholu sečteme jednou a hodnotu každé hrany přičteme dvakrát (hrana má vždy dva incidentní vrcholy, u kterých budeme hodnotu přičítat). To znamená

$$S_n + 2S_m = n \cdot h.$$

Nyní za S_n dosadíme ze vztahu 4.18 do předchozí rovnice a získáme

$$\binom{n+m+1}{2} - S_m + 2S_m = n \cdot h, \quad (4.19)$$

potom

$$S_m + \binom{n+m+1}{2} = n \cdot h. \quad (4.20)$$

Teoreticky, budou-li hodnoty hran nabývat různých možných čísel z $\{1, \dots, m+n\}$, bude se S_m pohybovat od sumy nejmenších hodnot $\{1, \dots, m\}$ po sumu největších možných hodnot $\{n+1, \dots, n+m\}$.

$$\sum_{i=1}^m i \leq S_m \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} i. \quad (4.21)$$

Ze vztahů 4.20 a 4.21 můžeme zjistit možné meze magické konstanty.

$$\binom{n+m+1}{2} + \binom{m+1}{2} \leq n \cdot h \leq 2\binom{n+m+1}{2} - \binom{n+1}{2}.$$

Pro magickou konstantu h bude tedy platit

$$\frac{\binom{n+m+1}{2} + \binom{m+1}{2}}{n} \leq h \leq \frac{2\binom{n+m+1}{2} - \binom{n+1}{2}}{n}. \quad (4.22)$$

Hodnota magické konstanty h je určena tím, jaké hodnoty budou přiřazeny hranám. Pro každý vrchol lze pak hodnotu dopočítat jako

$$f(u) = h - \sum_{uv \in E(G)} f(uv).$$

Duální ohodnocení VMT ohodnocení

Jako jsme měli u EMT ohodnocení, i pro VMT ohodnocení existuje ohodnocení duální. Oproti duálnímu ohodnocení u EMT, u ohodnocení VMT duální ohodnocení neexistuje pro všechny VMT grafy. Duální ohodnocení f' k VMT ohodnocení f sestrojíme následovně. Pro ohodnocení vrcholů platí

$$f'(v) = n + m + 1 - f(v) \quad \forall v \in V(G) \quad (4.23)$$

a duální ohodnocení hran bude

$$f'(uv) = n + m + 1 - f(uv) \quad \forall uv \in E(G).$$

Věta 13 [20] *Duální hodnocení f' k VMT ohodnocení f bude VMT pouze když je graf G r -pravidelný.*

Důkaz můžeme najít v [20].

4.3.2 Přehled známých výsledků VMT ohodnocení kubických grafů

- Komplettní graf K_n má VMT ohodnocení pro všechna n . [4, 20]
- Komplettní bipartitní grafy $K_{m,m}$ mají VTM ohodnocení pro všechna m . Graf $K_{3,3}$ tedy VMT ohodnocení má. [13, 21]
- Graf dvanáctistěnu ?
- Zobecněné Petersenovy grafy $P(n, k)$ mají VMT ohodnocení pro všechna n a k . [22]
- Petersenův graf $P(5, 2)$ má VMT ohodnocení. [13, 22]
- Žebříky $P_2 \square C_n$ mají VMT ohodnocení pro všechna n . [13, 4]

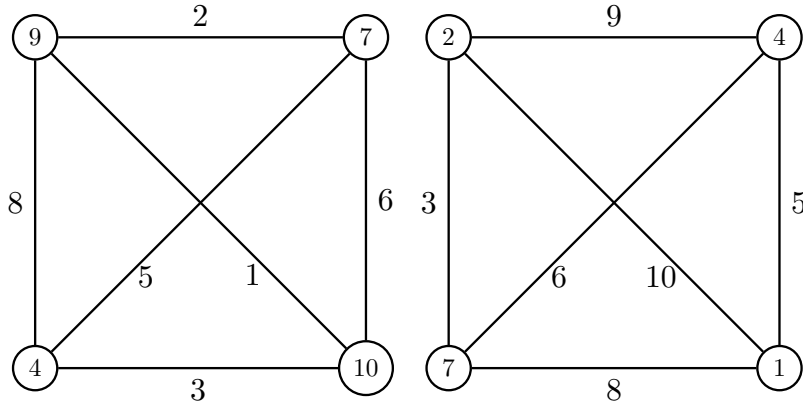
- Möbiův žebřík ?
- Snarky ?

Ohodnocení kompletního grafu K_4

Ze vztahu 4.22 známe meze magické konstanty. Pro graf K_4 bude h v rozmezí $19 \leq h \leq 25$. Z článku [20] známe počet možností VMT ohodnocení pro graf K_4 . Výsledky jsme shrnuli do tabulky 4.4 níže. Vždy po dvou jsou tato ohodnocení k sobě navzájem duální. Ohodnocení s magickou konstantou 20 je duální k ohodnocení s $h = 24$, a ohodnocení s $h = 21$ je duální k $h = 23$. Z práce “Magic Labelings of Graphs” [4] jsme převzali ohodnocení grafu K_4 s magickou konstantou $h = 20$, které můžeme vidět na obrázku 4.7.

Magická konstanta	Počet ohodnocení
$h = 19$	0
$h = 20$	2
$h = 21$	5
$h = 22$	0
$h = 23$	5
$h = 24$	2
$h = 25$	0

Tabulka 4.4: Možnosti ohodnocení grafu K_4



Obrázek 4.7: VMT ohodnocení grafu K_4 s $h = 20$, a k němu duální ohodnocení s $h = 24$.

Ohodnocení Kompletního Bipartitního grafu $K_{3,3}$

V článku “Vertex-Magic Total Labelings of Complete Bipartite Graphs” [21] jsme se dozvěděli, že VMT ohodnocení existuje pro každý graf $K_{m,m}$.

Věta 14 [21] *Vrcholově magické totální ohodnocení kompletního bipartitního grafu $K_{m,m}$ existuje pro každé $m > 1$ s magickou konstantou*

$$h = \frac{1}{2}((m+1)^3 - (m+1)). \quad (4.24)$$

Důkaz Nejprve si sestojíme magický čtverec $S = (s_{ij})$ o velikosti $(m+1)$ s čísly $\{1, \dots, (m+1)^2\}$ a magickou konstantou $\frac{1}{2}(m+1)(m^2+2m+2)$. Nyní si vytvoříme matici $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = s_{ij} - 1$. Jelikož je S magický čtverec, součty čísel na řádcích a sloupcích matice A jsou rovny konstantě

$$\frac{1}{2}((m+1)^3 - (m+1)).$$

Čísla v matici budou v rozmezí $\{0, \dots, (m+1)^2 - 1\}$, každé jednou. Předpokládejme, že jsou řádky a sloupce matice A permutované tak, aby $a_{00} = 0$. Matice A je reprezentací VMT ohodnocení kompletního bipartitního grafu $K_{m,m}$. Čísla matice A na pozicích a_{10} až a_{m0} jsou ohodnocení vrcholů první partity, a čísla na pozicích a_{01} až a_{0m} pak ohodnocení vrcholů partity druhé. ■

Příklad 15

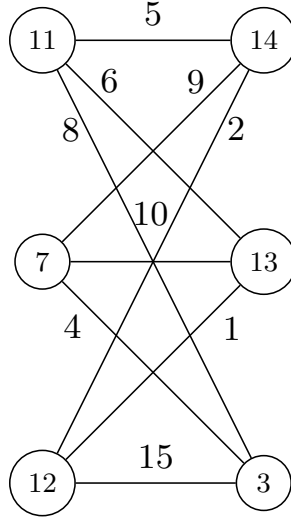
Ukažme si nyní ohodnocení grafu $K_{3,3}$. Sestojme si magický čtverec S s magickou konstantou $\frac{4 \cdot 17}{3} = 34$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Z magického čtverce S vytvoříme matici A se součty na sloupcích a řádcích rovných $34 - (m+1) = 30$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 13 & 3 \\ 11 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Ohodnocení vrcholů první partity budou čísla $\{11, 7, 12\}$ a druhé partity $\{14, 13, 3\}$. Zbylé hodnoty použijeme k ohodnocení hran, se kterými jsou vrcholy incidentní. Hotové ohodnocení vypadá následovně.



Obrázek 4.8: VMT hodnocení grafu $K_{3,3}$ s magickou konstantou $h = 30$.

■

Ohodnocení zobecněných Petersenových grafů

Ohodnocení zobecněných Petersenových grafů můžeme najít např. v článku “Vertex-Magic Total Labling of Generalized Petersen Graphs” [22] z roku 2002.

Věta 15 [22] *Zobecněné Petersenovy grafy mají VMT ohodnocení pro všechna $n \geq 3$ a $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ s magickou konstantou $h = 9n + 2$.*

Důkaz Označme si vrcholy grafu na vnitřním a vnějším cyklu u_i a v_i , jako jsme to udělali v kapitole o Zobecněných Petersenových grafech 3.5 v úvodní kapitole o kubických grafech. VMT ohodnocení sestrojíme následovně. Začneme s vrcholem u_1 .

$$f(u_1) = 4n + 1$$

Následně pro $i = 2, \dots, n$.

$$f(u_i) = 5n + 2 - i.$$

Pro $i = 1, \dots, k$

$$f(v_i) = 2n + k + 1 - i$$

a pro $i = k + 1, \dots, n$

$$f(v_i) = 3n + k + 1 - i.$$

Nyní zjistíme ohodnocení hran. Pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$f(u_i u_{i+1}) = i,$$

$$f(u_i v_i) = 4n + 1 - i$$

a naposledy

$$f(v_i v_{i+1}) = n + i.$$

Zkontrolujeme váhu všech vrcholů u a v .

$$w(u_i) = f(u_i) + f(u_i v_i) + f(u_i u_{i+1}) + f(u_{i-1} u_i) = 9n + 2,$$

$$w(v_i) = f(v_i) + f(u_i v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i-1} v_i) = 9n + 2.$$

Vidíme, že skutečně se váhy všech vrcholů rovnají magické konstantě $h = 9n + 2$, přičemž byly k ohodnocení použity všechna čísla $1, \dots, 5n$, každé právě jednou. ■

Příklad 16

Ukažme si nyní například VMT ohodnocení grafu $P(6, 2)$ (Dürerova grafu). Začneme ohodnocením vrcholů.

$$f(u_1) = 25 \quad f(v_1) = 14,$$

$$f(u_2) = 30 \quad f(v_2) = 13,$$

$$f(u_3) = 29 \quad f(v_3) = 18,$$

$$f(u_4) = 28 \quad f(v_4) = 17,$$

$$f(u_5) = 27 \quad f(v_5) = 16,$$

$$f(u_6) = 26 \quad f(v_6) = 15.$$

Nyní si ohodnotíme hrany.

$$f(u_1 u_2) = 1, \quad f(u_1 v_1) = 24, \quad f(v_1 v_3) = 7,$$

$$f(u_2 u_3) = 2, \quad f(u_2 v_2) = 23, \quad f(v_2 v_4) = 8,$$

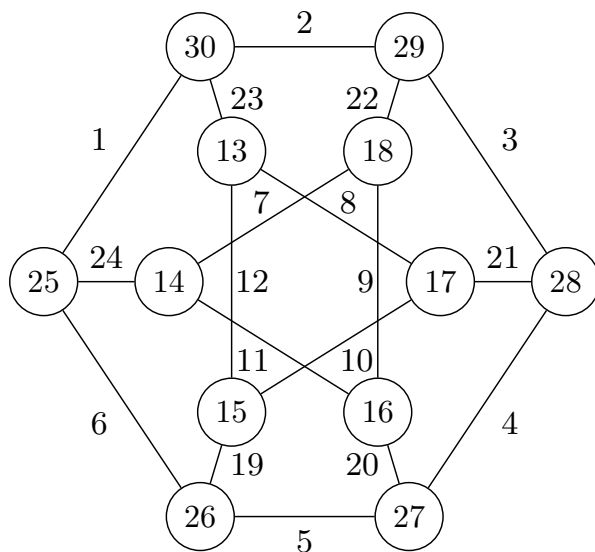
$$f(u_3 u_4) = 3, \quad f(u_3 v_3) = 22, \quad f(v_3 v_5) = 9,$$

$$f(u_4 u_5) = 4, \quad f(u_4 v_4) = 21, \quad f(v_4 v_6) = 10,$$

$$f(u_5 u_6) = 5, \quad f(u_5 v_5) = 20, \quad f(v_5 v_1) = 11,$$

$$f(u_6 u_1) = 6, \quad f(u_6 v_6) = 19, \quad f(v_6 v_2) = 12.$$

Sestrojené VMT ohodnocení podle důkazu Věty 15 můžeme vidět na obrázku 4.9.

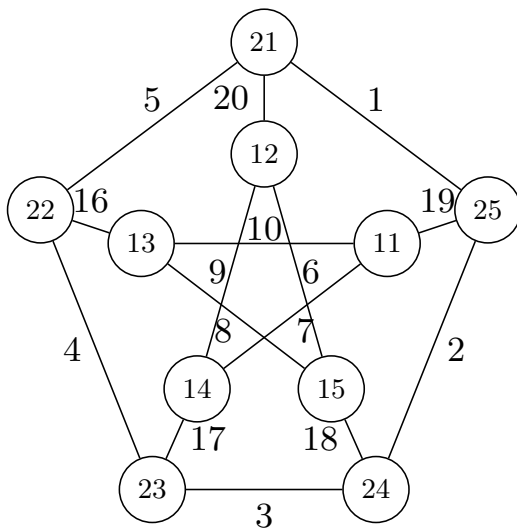


Obrázek 4.9: VMT ohodnocení Dürerova grafu $P(6, 2)$

■

Ohodnocení Petersenova grafu

U VMT ohodnocení Petersenova grafu můžeme jednoduše využít ohodnocení pro zobecněné Petersenovy grafy z minulé kapitoly. Ohodnocení Petersenova grafu $P(5, 2)$ podle Věty 15 je zobrazeno na obrázku 4.10 níže.



Obrázek 4.10: VMT ohodnocení Petersenova grafu $P(5, 2)$

Ohodnocení žebříku

V případě, kdy je k Zobecněného Petersenova grafu rovno jedné, se vnitřní vrcholy spojí v cyklus. V tomto případě dostaneme graf, kterému říkáme žebřík. Tj. $P(n, 1) = P_2 \square C_n$. Můžeme tedy využít poupravenou konstrukci VMT ohodnocení zobecněného Petersenova grafu z minulé kapitoly.

Věta 16 [23] *Žebřík $P_2 \square C_n$ má VMT ohodnocení pro každé $n \geq 3$ s magickou konstantou $h = 9n + 2$.*

Důkaz Tento důkaz je součástí výše zmíněného článku [23] pro ohodnocení žebříků $P_2 \square C_n$. Začneme ohodnocením vrcholů cyklů u a v . (Použijeme stejné značení vrcholů jako v úvodní kapitole 3.2.)

$$f(u_i) = 5n + 1 - i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+3n}{2} & i = 1, 3, \dots, n \\ \frac{i+2n}{2} & i = 2, 4, \dots, n-1. \end{cases}$$

Nyní ohodnotíme hrany spojující vrcholy u a v

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} 2n + 3 - i & i = 1, 2 \\ 3n + 3 - i & i = 3, \dots, n. \end{cases}$$

Dále ohodnotíme hrany cyklu u

$$f(u_i u_{i+1}) = i, \quad i = 1, \dots, n.$$

a naposledy přiřadíme hodnoty hran cyklu v

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n & i = 1 \\ n - 1 + i & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Zkontrolujeme-li si znovu váhy všech vrcholů, zjistíme, že se opět rovnají magické konstantě $h = 9n + 2$.

$$w(u_i) = f(u_i) + f(u_i v_i) + f(u_i u_{i+1}) + f(u_{i-1} u_i) = 5n + 1 - i + 4n + 2 - i + i + i - 1 = 9n + 2.$$

$$w(v_i) = f(v_i) + f(u_i v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i-1} v_i) = 3n + 3 - i + 4n + 2 - i + n - 1 + i + n - 1 + i - 1 = 9n + 2.$$

K ohodnocení jsou použity všechny hodnoty od 1 do $(n + m)$, každá právě jednou. ■

Příklad 17

Pro nejmenší žebřík $P_2 \square C_3$ vyjde VMT ohodnocení vypočtené z předchozího důkazu takto. Ohodnotíme vrcholy u a v .

$$f(u_1) = 15, \quad f(v_1) = 8,$$

$$f(u_2) = 14, \quad f(v_1) = 7,$$

$$f(u_3) = 13, \quad f(v_1) = 9$$

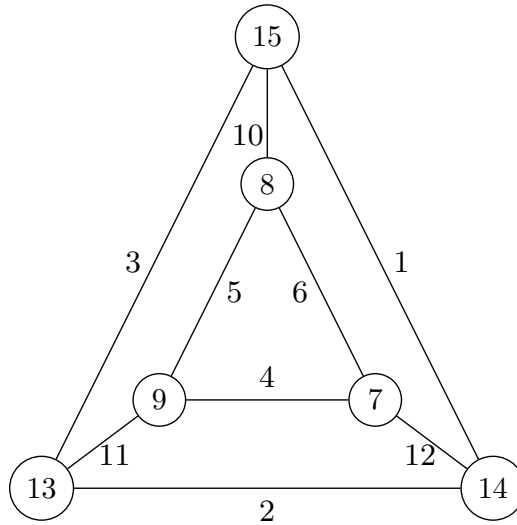
a následně ohodnotíme všechny hrany.

$$f(u_1u_2) = 1, \quad f(u_1v_1) = 10, \quad f(v_1v_2) = 6,$$

$$f(u_2u_3) = 2, \quad f(u_2v_2) = 12, \quad f(v_2v_3) = 7,$$

$$f(u_3u_1) = 3, \quad f(u_3v_3) = 11, \quad f(v_3v_1) = 9.$$

Uvedené ohodnocení $P_2 \square C_3$ je znázorněno na obrázku 4.11 níže.



Obrázek 4.11: VMT ohodnocení grafu $P_2 \square C_3$

■

Ani u vrcholově magického totálního ohodnocení jsme nedokázali uvést výsledky pro všechny námi uvedené kubické grafy. Nepodařilo se nám ukázat výsledky o ohodnocení dvanáctistěnu, Möbiova žebříku a Snarků. Jako jediný snark, stejně jako v kapitole o EMT ohodnocení, u kterého víme o existenci VMT ohodnocení, je Petersenův graf $P(5, 2)$. Po srovnání hranových barvení grafů a jejich VMT ohodnocení jsme nezjistili žádnou zřejmou souvislost mezi podmožinami použitých

hodnot u ohodnocení a množinami hran obarvených jednou barvou. Stejně jako u předchozích ohodnocení rovinnost grafu nezaručuje ani nevylučuje existenci VMT ohodnocení. Planární grafy (např. kompletní graf K_4 a žebřík $P_2 \square C_n$) i neplanární grafy (např. Zobecněné Petersenovy grafy) mají VMT ohodnocení.

Kapitola 5

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo zpracovat přehled všech známých výsledků vybraných ohodnocení u kubických grafů. V práci jsme se zaměřili na tři různá ohodnocení magického typu, ohodnocení supermagické, hranově magické totální ohodnocení a vrcholově magické totální ohodnocení.

Práce není soustředěna jen na vyjmenování grafů pro které daná ohodnocení existují. Ukazujeme také, jaké jsou možnosti konstrukcí těchto ohodnocení zároveň i s příklady konstrukcí. Pro kubické grafy a třídy kubických grafů, u kterých ohodnocení neexistuje, ukazujeme argumenty svědčící o neexistenci daného typu ohodnocení.

Zajímalo nás také, zda-li můžeme pozorovat souvislost existence (neexistence) daných typů ohodnocení s hranovým barvením grafů. Na žádnou zřejmou souvislost jsme však nepřišli. Pouze u supermagického ohodnocení jsme popsali, jak hranové barvení Möbiova žebříku souvisí s jeho supermagickým ohodnocením. Jednotlivé barvy odpovídají podmnožinám použitých hodnot, které po řadě obsahují nejmenší, prostřední a největší čísla.

V práci jsme studovali souvislost existence (popř. neexistence) ohodnocení s rozdělením kubických grafů podle Vizingovy věty.

Supermagické ohodnocení kubických grafů s $\chi' = 3$ existuje u kompletního bipartitního grafu $K_{3,3}$ a Möbiova žebříku M_n pokud je n liché. Ohodnocení neexistuje pro kompletní graf K_4 , graf dvanáctistěnu, žebříky $P_2 \square C_n$ a Möbiovy žebříky M_n pro n sudé. Petersenův graf s $\chi' = 4$ supermagické ohodnocení nemá.

Hranově magické totální ohodnocení kubických grafů, které mají $\chi' = 3$, existuje u $K_{3,3}$, žebříků $P_2 \square C_n$ pro n liché a pro Zobecněné Petersenovy grafy $P(n, k)$. Ohodnocení neexistuje pro graf dvanáctistěnu, žebříky $P_2 \square C_n$ s $n \equiv 2 \pmod{4}$ a Möbiovy žebříky M_n s $n \equiv 2 \pmod{4}$. U grafů s $\chi' = 4$ je to pak Petersenův graf, pro který EMT ohodnocení existuje.

Vrcholově magické totální ohodnocení existuje pro všechny grafy se známými výsledky. Pro grafy s $\chi' = 3$ to jsou K_4 , $K_{3,3}$, žebříky $P_2 \square C_n$ a Zobecněné Petersenovy grafy $P(n, k)$. Jako jediný graf s $\chi' = 4$ je Petersenův graf, o kterém víme, že VMT ohodnocení má.

Při supermagickém ohodnocení, kdy se hodnoty přiřazují jen hranám, máme méně možností jak hodnoty mezi hrany rozdělit. Např. žebřík $P_2 \square C_n$ není supermagický pro jakékoliv n . Na druhé straně u VMT ohodnocení se hodnoty přiřazují jak hranám, tak i vrcholům. Máme tedy více volnosti a možností jak rozmístit hodnoty a splnit tak podmínky ohodnocení. Žebřík $P_2 \square C_n$ je VMT pro každé n . Můžeme pozorovat, že kromě grafů s neznámými výsledky, existuje VMT ohodnocení pro všechny námi popsané grafy. Důvodem může být, že pro VMT ohodnocení neexistuje omezující podmínka pro počet vrcholů, která by vyloučila nějakou podtřídu. Většinou dokonce existuje více ohodnocení s různými hodnotami pro magickou konstantu. Samozřejmě nevíme, jak je to s existencí VMT ohodnocení pro kubické grafy, kde výsledky nejsou známy, např. pro Snarky nebo Möbiovy žebříky. Mezi kubickými grafy s $\chi' = 4$ je nejpopulárnější zástupce této třídy Petersenův graf. Je tak jediným grafem v této práci z této třídy, pro který jsme našli známe EMT a VMT ohodnocení.

V průběhu zkoumání zmíněných ohodnocení se ukázalo, že i pro některé jednoduše popsatelné grafy výsledky nejsou známy. U supermagického ohodnocení neznáme výsledky u Zobecněných Petersenových grafů a Snarků. U hranově magického totálního ohodnocení jsme nedokázali zjistit výsledky pro žebříky s počtem vrcholů $n \equiv 0 \pmod{4}$, Möbiovy žebříky s $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$ a Snarky. U vrcholově magického totálního ohodnocení pak neznáme výsledky u grafu dvanáctistěnu, Möbiových žebříků a Snarků.

V jednom případě se nám nepodařilo ukázat konstrukci existujícího ohodnocení, protože i přes pokusy se nám včas nepodařilo získat článek avizující existenci daného ohodnocení. Konkrétně jde o EMT ohodnocení Zobecněných Petersenových grafů a článek “On magic and antimagic total labelings of generalized Petersen graph” [19].

Mezi následující směry výzkumu bychom mohli zařadit konstrukce magických ohodnocení právě pro grafy z jednoduše popsatelných tříd, pro které se na základě našeho výzkumu jeví, že byly opomenuty, nebo se je zatím nepodařilo ohodnotit. Také bychom se mohli zaměřit na hledání ohodnocení Snarků. Ty jsou obtížněji popsatelné a konstrukce ohodnocení pro ně nejsou známy. Nevíme, zda byly zatím jen opomíjeny. Je ale pravděpodobné, že nalézt ohodnocení Snarků bude obtížné.

Literatura

1. SEDLÁČEK, J. On magic graphs. *Math. Slov.* 1976, roč. 26, s. 97–107.
2. KOVÁŘ, Petr. *Úvod do Teorie Grafů*. 2012. Skriptum VŠB-TU Ostrava.
3. KOVÁŘ, Petr. *Teorie grafů*. 2020. Dostupné také z: https://home1.vsb.cz/~kov16/files/skriptum_teorie_grafu_tisk.pdf.
4. KOVÁŘ, Petr. *Magic labeling of graphs*. 2004. Dis. VŠB-TU Ostrava, fakulta Aplikované matematiky.
5. ARDEH, Hamid; ALLEN, Mathew S. Investigating Cases of Jump Phenomenon in a Nonlinear Oscillatory System. *The Australasian Journal of Combinatorics*. 2013.
6. COMMONS.WIKIMEDIA.ORG, David Eppstein : 2006. Dostupné také z: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moebius-ladder-16.svg>. File: Moebius-ladder-16.svg.
7. BAČA, M.; JENDROL, S.; MILLER, M.; RYAN, J. Antimagic labeling of Generalized Petersen graphs that are plane. *Ars Combinatoria - Waterloo then Winnipeg*. 2004, roč. 73, s. 115–128.
8. CASTAGNA, F.; PRINS, G. Every Generalized Petersen Graphs has a Tait coloring. *Pacific journal of America*. 1972, roč. 40, s. 53–58.
9. CHLADNÝ, Michal; ŠKOVIERA, Martin. *Factorisation of Snarks*. 2010.
10. COMMONS.WIKIMEDIA.ORG, Koko90 : 2010. Dostupné také z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flower_snarks.svg. File: Flower snarks.svg.
11. STEWART, B. M. Supermagic complete graphs. *Canadian Journal of Mathematics*. 1967, roč. 19, s. 427–438.
12. IVANČO, Jaroslav. On Supermagic Regular Graphs. *Mathematica Bohemica*. 2000, roč. 125, s. 99–114.
13. GALLIAN, Joseph A. *A dynamic survey of graph labeling*. 1997.
14. STEWART, B. M. Magic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*. 1966, roč. 18, s. 1031–1059.
15. KOTZIG, A.; ROSA, A. Magic valuations of finite graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*. 1970, roč. 13, s. 451–461.

16. WALLIS, W. D.; BASKORO, E. T.; M.MILLER; SLAMIN. Edge-magic total labelings. *The Australasian Journal of Combinatorics*. 2000, roč. 22, s. 177–190.
17. CRAFT, D.; TESAR, E. H. On a question by Erdős about edge-magic graphs. *Discrete Mathematics*. 1999, roč. 207, s. 271–276.
18. BAUTISTA, Maebelle Rose G.; CORONADO, Maria Victoria C.; NAVA, Jonathan C.; REYES, Mary Rose A. *Edge Magic Total Labeling of Prism*. 2016. Polytechnic University of the Philippines.
19. NGURAH, A. A. G.; BASKORO, E. T. On magic and antimagic total labelings of generalized Petersen graph. *Utilitas Mathematica*. 2003, roč. 63, s. 97–107.
20. MCDOUGALL, J. A.; MILLER, Mirka; SLAMIN; WALLIS, W. D. Vertex-magic Total Labelings of Graphs. *Utilitas Mathematica*. 2002, roč. 61, s. 3–21.
21. GRAY, I. D.; MACDOUGALL, J. A.; SIMPSON, R. J.; WALLIS, W. D. Vertex-Magic Total Labelings of Complete Bipartite Graphs. *Ars Combinatoria -Waterloo then Winnipeg*. 2003, roč. 69.
22. BAČA, M.; MILLER, M.; SLAMIN. Vertex-Magic Total Labelings of Generalized Petersen Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*. 2002, roč. 79, s. 1259–1263.
23. SLAMI; MILLER, M. On two conjectures concerning vertex magic total labelings of generalized Petersen graphs. 2001.